

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘICONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a IX -a

Problema 1.

Suma a trei numere este 100. Știind că primul număr este 40% din al doilea iar al treilea număr este 150% din primul număr, determinați cele trei numere.

Problema 2.

a) Fie D mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC . Să se demonstreze că $\overline{AD} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2}$.

b) Folosind, eventual, punctul anterior, să se demonstreze că $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC .

Problema 3.

Pe dreapta (d) se iau în ordine punctele M, M_0, M_1, \dots, M_n , astfel încât $MM_0 = 1$ cm, $M_0M_1 = 3$ cm, $M_1M_2 = 3^2$ cm etc. (fiecare segment este de trei ori mai mare decât segmentul dinaintea lui). Să se determine lungimea segmentului MM_{2018} .

Problema 4.

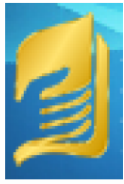
Fie $a_n = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$; $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că $a_8 = \frac{2}{3}$.

b) Demonstrați că $a_n > 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

c) Determinați $n \leq 15$ astfel încât $a_n \in \mathbb{Q}$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘICONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a X-a

Problema 1.

- a) Verificați egalitatea $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $(\forall) z \in \mathbb{C}$.
b) Determinați $k > 0$ astfel încât $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = k(|z_1|^2 + |z_2|^2)$, $(\forall) z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
c) Dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$ și $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$, să se determine $|z_1 - z_2|$.

Problema 2.Pentru $x > 1$, notăm cu $S_n(x) = x^{-1} + x^{-2} + \dots + x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Calculați $(1 - x) \cdot S_n(x)$.
b) Deduceți $x^{-1} + x^{-2} + \dots + x^{-n} = \frac{x^n - 1}{x^n(x - 1)}$, $(\forall) x > 1$.
c) Folosind, eventual, punctul anterior, să se demonstreze că $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{3} < 3$, $(\forall) n \geq 1$.

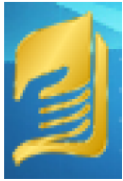
Problema 3.Avem la dispoziție un număr nelimitat de jetoane pe care sunt scrise numerele 5, 7 sau 11. Un număr $n \in \mathbb{N}^*$ se numește „norocos” dacă găsim un număr de jetoane astfel încât suma numerelor scrise pe ele să fie egal cu n .

- a) Demonstrați că numărul 13 nu este „norocos”.
b) Demonstrați că numerele: 14, 15, 16 și 18 sunt „norocoase”.
c) Demonstrați că orice număr natural $n \geq 14$ este „norocos”.

Problema 4.La un concurs de atletism participă liceele A, B, C, fiecare liceu cu câte 3 elevi. Punctajul final al fiecărui liceu se calculează adunând punctele obținute de elevii liceului respectiv. Elevul sosit pe locul k ($k = \overline{1,9}$) i se acordă $\frac{10}{k}$ puncte. Juriul concursului a constatat următoarele condiții îndeplinite simultan:

- Oricare doi elevi nu au sosit în același timp.
 - Primele trei locuri au fost ocupate de elevi de la licee diferite.
 - Elevii liceului C au sosit unul după altul.
 - Fiecare elev de la liceul B avea chiar în fața sa un elev de la liceul A.
- Care este clasamentul final al celor trei licee în funcție de punctajul obținut de fiecare dintre ele?

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘICONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XI -a

Problema 1.

a) Calculați $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 9}{x^2 + 5x + 3} \right)^x$.

b) Determinați $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + x + 3} - \sqrt{3x^2 + x + 5} - mx - n) = 0$.

Problema 2.

Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Calculați A^2 și $\det(A)$.

b) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ și $\det(X) = 0$, demonstrați că $X^2 = (a + d) \cdot X$.

c) Rezolvați ecuația $X^{2018} = A$.

Problema 3.

Să se rezolve ecuația $\Delta(x) = 0$, unde: $\Delta(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^4 & 16 \\ x^2 + 1 & x^4 + 1 & 17 \\ x^2 + x & x^4 + x^2 & 20 \end{vmatrix}$.

(Se vor folosi proprietățile determinantilor)

Problema 4.Doi prieteni, Cristian și Andrei, măsoară fiecare distanța de acasă până la școală. Distanța măsurată de Cristian este egală cu x km, iar cea măsurată de Andrei este egală cu y km. Știind că există $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$, nu neapărat distincte

astfel încât să fie verificat sistemul:
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ ax + y = 5 \\ cx + 3y = b + 6 \end{cases}, \text{ determinați } a, b, c \text{ și distanțele } x \text{ și } y.$$

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XII-a

Problema 1.

Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1; & x \leq 1 \\ x^3 + x^2 - 4x + b; & x > 1 \end{cases}$ să fie o primitivă pentru o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x)$. Determinați apoi funcția f .

Problema 2.

Calculați $I(x) = \int \frac{x \cdot e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $x \in (-1, 1)$.

Problema 3.

Considerăm mulțimea $G = \left\{ A(x) \in M_3(\mathbb{R}), A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x & 1 & 0 \\ 2x^2 + 3x & 2x & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

- Demonstrați că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$.
- Demonstrați că (G, \cdot) este grup abelian.
- Demonstrați că grupul $(\mathbb{R}, +)$ este izomorf cu grupul (G, \cdot) .
- Calculați $(A(x))^{2018}$.

Problema 4.

Fie M o mulțime nevidă și „*” o lege de compoziție pe M . Spunem că elementul $d \in M$ este „destroyer” pentru operația „*” dacă $d * x = x * d = d$, $(\forall) x \in M$. Pentru $a, b \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ fixate, definim pe \mathbb{R} operația „*” printru $x * y = bxy + bx + aby + a^2b - a$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

- Demonstrați că operația „*” este asociativă și admite element „destroyer”.
- Demonstrați că $E = (-2018a) * (-2017a) * \dots * (-a) * 0 * a * \dots * (2017a) * (2018a) < 0$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.