Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018

CLASA a 10-a
Soluţii şi barem de notare

Problema 1. Să se afle x pentru care

$$\log_2(x^2+4)-\log_2 x+x^2-4x+2=0.$$

Soluţie. Avem $x>0$ şi ecuaţia se scrie echivalent

$$\log_2\left(x+\frac{4}{x}\right)=2-(x-2)^2.$$

.... 3p

Cum $x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$, obţinem $\log_2\left(x+\frac{4}{x}\right)\geq 2$ 2p

Pe de altă parte, $2-(x-2)^2\leq 2$ 1p

deci ecuaţia are soluţia unică $x=2$ 1p

Problema 2. Să se arate că numărul

$$\sqrt[n]{\sqrt{2018}+\sqrt{2017}}+\sqrt[n]{\sqrt{2018}-\sqrt{2017}}$$

este iraţional, pentru orice $n\geq 2$. *Gazeta Matematică*

Soluţie. Să presupunem că, pentru un anumit n, numărul este raţional. Notăm $a=\sqrt[n]{\sqrt{2018}+\sqrt{2017}}$, $b=\sqrt[n]{\sqrt{2018}-\sqrt{2017}}$. Atunci $a+b\in\mathbb{Q}$ şi $ab=1$ 1p

Dacă $s_k=a^k+b^k$, atunci $(s_k)_{k\geq 0}$ verifică relaţia de recurenţă

$$s_{k+2}-(a+b)s_{k+1}+s_k=0,$$

pentru orice $k\geq 0$ 3p

Cum $s_0=2$ şi $s_1=a+b\in\mathbb{Q}$, deducem că $s_k\in\mathbb{Q}$, pentru orice k. ... 2p

În particular, $s_n=2\sqrt{2018}\in\mathbb{Q}$, contradicţie 1p

Problema 3. Fie a,b,c numere reale, astfel încât $1<b\leq c^2\leq a^{10}$, şi

$$\log_a b+2\log_b c+5\log_c a=12.$$

Să se arate că

$$2\log_a c+5\log_c b+10\log_b a\geq 21.$$

Soluţie Fie $x=\log_a b$, $y=2\log_b c$, $z=5\log_c a$. Din ipoteză rezultă că $x,y,z>0$ şi $x+y+z=12$ 1p

De asemenea, obţinem $xyz=10\log_a b\log_b c\log_c a=10$ 1p

Din $b\leq c^2$ deducem $2\log_b c\geq 1$, iar din $c^2\leq a^{10}$ rezultă $5\log_c a\geq 1$, aşadar $y,z\geq 1$, de unde $x\leq 10$ 2p

Să observăm că

$$2\log_a c + 5\log_c b + 10\log_b a = xy + xz + yz = x(y+z) + yz = x(12-x) + \frac{10}{x}$$

....2p

Inegalitatea $x(12-x) + \frac{10}{x} \geq 21$ este echivalentă cu $(x-1)^2(x-10) \leq 0$, evident adevărată 1p

Problema 4. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Să se determine numerele complexe z care verifică relaţiile

a) $z^n + z^{n-1} + \ldots + z^2 + |z| = n$;

b) $|z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \ldots + |z|^2 + z = nz^n$.

Soluţie. Observaţia că din enunţ rezultă $n > 2$ nu se noteaza.

Din condiţia a) deducem

$$n = |z^n + z^{n-1} + \ldots + z^2 + |z|| \leq |z|^n + |z|^{n-1} + \ldots + |z|^2 + |z|,$$

de unde $|z| \geq 1$. .... 2 puncte

Din b) deducem

$$n|z|^n \leq |z| + |z|^2 + \ldots + |z|^{n-1} < 1 + |z| + \cdots + |z|^{n-1},$$

.... 2 puncte

şi apoi $|z| = 1$ .... 2 puncte

Introducand in b) ajungem lal o contradictie .... 1 punct