OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

15 februarie 2025

CLASA a IX-a

(7p) 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{x^3-3x^2+2x-1}{6}\right]=x-2$.

2. (5p) a) Demonstrați că $|a+b|+|a-b|=|a|+|b|+\left||a|-|b|\right|$ pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$.

(2p) b) Determinați numerele $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $|a+b|^n+|a-b|^n=\left(|a|+|b|\right)^n+\left||a|-|b|\right|^n$, pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$.

(7p) 3. Fie patrulaterul $ABCD$ înscris în cercul de centru O şi punctele $M\in(AB)$, $N\in(BC)$, $P\in(CD)$, $T\in(AD)$ astfel încât $\frac{PC}{DC}=\frac{NB}{CB}=\frac{MA}{AB}=\frac{TA}{AD}=m$. Notăm cu H ortocentrul triunghiului PNM şi cu G centrul de greutate al triunghiului TBC. Arătaţi că O este centrul cercului circumscris triunghiului PNM dacă şi numai dacă $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

(7p) 4. În triunghiul ABC, $D\in(BC), E\in(CA)$ și $F\in(AB)$ sunt picioarele bisectoarelor interioare. Să se demonstreze că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AF}=\vec{0}$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.