OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
15 februarie 2025

CLASA a XII-a

1. a) (3p) Arătați că oricare ar fi două numere reale $x, y \in (-\infty, 1)$ are loc inegalitatea $\dfrac{2024-xy}{2025-x-y} < 1$.

b) (4p) Pe mulțimea $M = (-\infty, 1)$ se consideră legea de compoziție $x * y = \dfrac{2024-xy}{2025-x-y}$.

Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este comutativă și asociativă, dar **nu** are element neutru.

2. Se consideră $m, n \in \mathbb{R}$ și funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x + 1}{e^x + 2x^2 + 2x + 4}, & x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{mx + n}{x + 5}, & x \in [0, \infty) \end{cases}$.

a) (3p) Determinați toate perechile (m, n) pentru care funcția f admite primitive.

b) (4p) Pentru $m = 0$ și $n = 1$, determinați o primitivă F a lui f cu proprietatea că $F(0) = 0$.

3. (7p) Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ și funcțiile integrabile $f, g : [0,1] \to [a, b]$. Știind că $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq \dfrac{a+b}{2}$ și că $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x \leq \dfrac{a+b}{2}$, demonstrați că $\int_0^1 f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

4. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu elementul neutru e. Știm că acest grup G admite un subgrup propriu H cu proprietatea că $x^2 = e$, pentru orice $x \in G \setminus H$.

a) (3p) Arătați că există un astfel de grup.

b) (4p) Dacă $\mathrm{ord}(G) > 2 \cdot \mathrm{ord}(H)$, arătați că grupul G este comutativ.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.