OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
15 februarie 2025

CLASA a XI-a

1. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) (4p) Determinați suma elementelor matricei A^{2024}.

b) (3p) Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $AXA = I_2$.

2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și A^t transpusa lui A. Spunem că matricea A are proprietatea $(\mathcal{P})$ dacă verifică egalitatea $\det(A - \mathrm{i}A^t) = \mathrm{i} \cdot \det(\mathrm{i}A + A^t)$.

a) (3p) Arătați că orice matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ are proprietatea $(\mathcal{P})$.

b) (4p) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Știind că matricea A are proprietatea $(\mathcal{P})$, demonstrați că $\det(A) = \dfrac{(b-c)^2}{2}$.

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu proprietatea că şirul $(a_n^2 + 2a_n + 2025)_{n\geq 1}$ este convergent.

a) (3p) Dacă $a_n \geq -1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

b) (4p) Dați exemplu de un șir divergent cu proprietatea din enunț.

4. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 \in (0,1)$ și $x_{n+1} = x_n - \operatorname{arctg}(\sin^2 x_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) (3p) Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent la zero.

b) (4p) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}(n \cdot x_n)$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.