OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

15 februarie 2025

CLASA a X-a

(7p) 1. Rezolvați în mulțimea $(0,\infty)$ ecuația $\sqrt[4]{x\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt[7]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt[12]{x\sqrt{x}}}=6$.

(7p) 2. Să se demonstreze că dacă $x,y,z\in(0,1)$ sau $x,y,z\in(1,\infty)$ atunci are loc inegalitatea:

$$\log_x yz+\log_y xz+\log_z xy\geq 3+2(\log_{yz} x+\log_{xz} y+\log_{xy} z).$$

3. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisface proprietatea $f\left(f(x)\right)=x^2+3x+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

(2p) a) Să se determine $f(-1)$;

(2p) b) Să se demonstreze că funcția f nu este funcție injectivă;

(3p) c) Să se demonstreze că nici funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică $g(x)=x^2-3xf(x)+1$ nu este injectivă.

4. (4p) a) Fie $a,b\in(0,\infty), a\neq b$ și numerele complexe z_1,z_2, cu $bz_1+az_2\neq 0$. Demonstrați că numărul $z=\dfrac{az_1+bz_2}{bz_1+az_2}$ are modulul egal cu 1 dacă și numai dacă $|z_1|=|z_2|$.

(3p) b) Demonstrați că $\left|\dfrac{az_1|z_2|+b|z_1|z_2}{bz_1|z_2|+a|z_1|z_2}+\dfrac{bz_1|z_2|+a|z_1|z_2}{az_1|z_2|+b|z_1|z_2}\right|\leq 2$, pentru orice $a,b\in(0,\infty), a\neq b$ și $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ care nu anulează numitorii.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.