CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„*ADOLF HAIMOVICI*”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 15 FEBRUARIE 2025
CLASA a XII-a

H2 **Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii**

1. Pe mulțimea $G=(-2,2)$ se introduce legea "$\circ$", definită astfel: $x\circ y=\dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{4}}$, pentru orice $x,y\in G$.

a) (2p) Arătați că "$\circ$" este lege de compoziție internă;
b) (3p) Arătați că $(G,\circ)$ este grup;
c) (2p) Rezolvați în mulțimea $G=(-2,2)$ ecuația $x\circ\dfrac{1}{e+1}=\left(4+\dfrac{x}{e+1}\right)^{-1}$, unde e este elementul neutru al legii $\circ$".

2. Pe mulțimea numerelor întregi se introduce legea "$*$", definită astfel:
$$x*y=\begin{cases}x+y & \text{, dacă } x+y\le 5\\ 10-(x+y) & \text{, dacă } x+y>5\end{cases}.$$
a) (2p) Arătați că mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5\}$ este parte stabilă a mulțimii numerelor întregi în raport cu operația "$*$";
b) (3p) Arătați că operația indusă pe A de către operația "$*$" nu este asociativă, este comutativă și are element neutru;
c) (2p) Calculați x_n pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, unde $x_1=2$ și $x_n=x_{n-1}*2$, pentru orice $n\ge 2$.

3. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to[1,3], f(x)=x^4+x^2+1$.
a) (3p) Arătați că f este funcţie bijectivă;
b) (2p) Calculați $\displaystyle\int_0^1\frac{t(2t^2+1)}{f(t)}dt$;
c) (2p) Arătați că $\displaystyle\int_0^x f\left(\sqrt{t}\right)dt\le\frac{11}{6}$, pentru orice $x\in[0,1]$.

4. Se consideră funcţia $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, dată prin $f(x)=\dfrac{x-[x]}{2x-[x]+1}$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.
a) (3p) Demonstrați că funcția f nu admite primitive pe intervalul $[0,2]$;
b) (2p) Determinați primitivele funcției f pe un interval $I\subset(0,1)$;
c) (2p) Rezolvați ecuația $f(x)=x-[x]$ pe intervalul $[0,2]$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.