CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„*ADOLF HAIMOVICI*”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 15 FEBRUARIE 2025
CLASA a XII-a

H1 **Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

1. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x-1}{e^x} & , \quad x<1 \\ \dfrac{\ln^2 x}{x} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$.

a) **(2p)** Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) **(5p)** Să se determine F o primitivă a lui f care verifică relaţia F(0) + F(e) =$4050+\dfrac{e+3}{3e}$.

2. **(7p)** Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)...(x-10)$. Calculați $I=\int_{11}^{12} \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx$.

3. Fie mulțimea $\mathrm{G} = \{\mathrm{M(x)} = \mathrm{A} + \mathrm{xB} \;/\mathrm{x} \in \mathbb{R}^*\}$ unde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **(1p)** Verificați dacă $\mathrm{M(x)} \cdot \mathrm{M(y)} = \mathrm{M(x \cdot y)}, \forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^*$.

b) **(1p)** Demonstrați că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

c) **(3p)** Verificați dacă G este grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

d) **(2p)** Demonstrați că are loc relația $(\mathrm{M}(3))^{2025} = \mathrm{A}^{2025} + 3^{2025} \cdot \mathrm{B}^{2025}$.

4. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

a) **(2p)** Să se demonstreze că înmulțirea numerelor reale este distributivă față de legea de compoziție „ *”.

b) **(2p)** Să se determine două numere $a, b \notin \mathbb{Q}$ astfel încât $a * b \in \mathbb{Q}$. Există două numere $c, d \in \mathbb{Q}$ astfel încât $c * d \in \mathbb{Q}$?

c) **(3p)** Știind că $x_0 \in \mathbb{Q}$ și $x_n = x_0 * x_{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, să se determine cel mai mic număr natural de trei cifre astfel încât $x_n \in \mathbb{Q}$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.