CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA – 15 FEBRUARIE 2025
CLASA a XI-a

H2

Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii

1) Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) **(1p)** Să se demonstreze că $A(a)+A(-a)=2A(0)$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

b) **(2p)** Să se demonstreze că
$A(a_1)\cdot A(a_2)\cdot\ldots\cdot A(a_n)=2^{n-1}A(a_1\cdot a_1\cdot\ldots\cdot a_n)$, $\forall a_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n},\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$

c) **(4p)** Să se demonstreze că matricea $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot\ldots\cdot A(\log_{1023}1024)$ are toate elementele numere întregi.

2) Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x+2$ și A , B, C trei puncte apartinând graficului funcției f, cu abscisele numere naturale , distincte două câte două.

a) **(4p)** Să se demonstreze că punctele A,B,C nu sunt coliniare.

b) **(3p)** Să se demonstreze că aria triunghiului ABC este un număr natural.

3) Pentru orice număr real *a*, se consideră $f(a)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+ax^2+ax+1}-x\right)$.

a) **(4p)** Arătați că $f(a)=\dfrac{a}{3}$.

b) **(3p)** Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât are loc: $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(n)=f\left(\dfrac{2025!}{3^{2024}}\right)$.

4) (7p) Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^2+mx+3}{x^2+mx+4}$, unde $m\in\mathbb{R}$ și D este domeniul maxim de definiție al funcției. Să se determine, în funcție de valorile lui $m\in\mathbb{R}$, asimptotele graficului funcției f.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.