CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„*ADOLF HAIMOVICI*"
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 15 FEBRUARIE 2025
Clasa a X-a

H2	**Filiera teoretică, profil Real, specializarea Științe ale naturii**

1. (7p) Fie z_1 și z_2 numere complexe astfel încât $|z_1| = |z_2| = 1$ și $z_1 + z_2 = -i$.

a) (2p) Arătați că $\overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$;

b) (3p) Arătați că $(z_1 + i)(z_2 + i) = -1$;

c) (2p) Calculați $z_1^{2025} + z_2^{2025}$.

2. (7p) a) (3p) Demonstrați că, pentru orice numere reale a, b, c, are loc egalitatea :

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a);$$

b) (4p) Determinați numerele reale x pentru care $\sqrt[3]{3x+2} + \sqrt[3]{x^2 - 5x + 2} + \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 4} = 2$.

3. (7p) Fie $a, b, c \in (1, +\infty)$ cu proprietatea $\frac{\left(\lg a^{bc} + \lg b^{ac} + \lg c^{ab}\right)^3}{27} = a^2 b^2 c^2 \cdot \lg a \cdot \lg b \cdot \lg c$ și expresia $E = \log_a b + \log_b c + \log_c a$. Arătați că $E = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$.

4. (7p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + 6}{7}$.

a) **(3p)** Să se arate că f este inversabilă și să se determine f^{-1}, inversa ei.

b) **(4p)** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor f și f^{-1}.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.