CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„*ADOLF HAIMOVICI*”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 15 FEBRUARIE 2025
CLASA a X-a

H1 **Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

1. a) **(3p)** Aduceți la forma cea mai simplă expresia:
$E=\left(\log_x y+\log_y x+2\right)\cdot\left(\log_x y-\log_{xy} y\right)\cdot\log_y x+\log_x\left(\log_y \sqrt[x]{y}\right)$, unde $x\in\mathbb{N}^*, y>0, x\neq 1, y\neq 1$

   b) **(4p)** Rezolvați inecuația $\sqrt{\log_2 \dfrac{x+1}{4-x}}\leq 2$.

2. a) **(3p)** Arătați că $\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}=\dfrac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

   b) **(4p)** Fie $S_n=\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}}$. Găsiți cel mai mare număr natural n pentru care $S_n<\sqrt{2}$.

3. Fie $f:\mathbb{C}\setminus\{i\}\to\mathbb{C}^*$, $f(z)=\dfrac{2}{i-z}$.
   a) **(2p)** Arătați că: $f^{2025}(-1+2i)\notin\mathbb{R}$.
   b) **(2p)** Rezolvați ecuația $(f\circ f)(z)=z$.
   c) **(3p)** Să se determine mulțimea $\{z\in\mathbb{C} / f(z)\in\mathbb{R}\}$.

4. a) **(3p)** Să se calculeze suma: $S=\log_a\sqrt{x}+\log_{a^2}\sqrt[3]{x}+...+\log_{a^{2024}}\sqrt[2025]{x}$, a;x>0, $a\neq 1$, x>0.
   b) **(4p)** Dacă $x,y,z\in(1;\infty)$ să se arate că $\log_x^3(yz)+\log_y^3(xz)+\log_z^3(xy)\geq 24$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7
3. Timp de lucru 3 ore.