OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ, ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 15 februarie 2025
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE-CLASA a IX-a

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{x^3-3x^2+2x-1}{6}\right]=x-2$.

Sever Pop, S.G.M. 10/2024

Soluție și barem: Deoarece $[a]\in\mathbb{Z},\forall a\in\mathbb{R}$, deducem că $x\in\mathbb{Z}$ **1p**

Avem: $\left[\frac{x^3-3x^2+2x-1}{6}\right]=x-2 \Leftrightarrow x-2\le\frac{x^3-3x^2+2x-1}{6}<x-1\Leftrightarrow$

$6x-12\le x^3-3x^2+2x-1<6x-6\Leftrightarrow -11\le x^3-3x^2-4x<-5\Leftrightarrow -11\le x(x+1)(x-4)<-5$ **4p**

Pentru $x\le-2\Rightarrow x(x+1)(x-4)\le-12$, iar pentru $x\ge4\Rightarrow x(x+1)(x-4)\ge0$. Se poate verifica pentru valorile $x\in\{-1,0,1,2,3\}$ și se obține singura soluție $x=1$ **2p**

2. a) Demonstrați că $|a+b|+|a-b|=|a|+|b|+\big||a|-|b|\big|$ pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$.

b) Determinați numerele $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $|a+b|^n+|a-b|^n=(|a|+|b|)^n+\big||a|-|b|\big|^n$, pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$.

Ion Bursuc, Suceava

Soluție și barem:

a) $|a+b|=|a|+|b|\Leftrightarrow|a+b|^2=(|a|+|b|)^2\Leftrightarrow(a+b)^2=|a|^2+|b|^2+2|a|\cdot|b|\Leftrightarrow ab=|ab|\Leftrightarrow ab\ge0$
....**1p**

$|a-b|=\big||a|-|b|\big|\Leftrightarrow|a-b|^2=(|a|-|b|)^2\Leftrightarrow(a-b)^2=|a|^2+|b|^2-2|a|\cdot|b|\Leftrightarrow ab=|ab|\Leftrightarrow ab\ge0$
....**1p**

Deducem că $|a+b|=\big||a|-|b|\big|\Leftrightarrow ab\le0$ și $|a-b|=|a|+|b|\Leftrightarrow ab\le0$

Din cele de mai sus deducem că $|a+b|+|a-b|=|a|+|b|+\big||a|-|b|\big|$, pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$.
....**3p**

b) Folosind rezultatul de la punctul a) obținem:

$|a+b|^n=(|a|+|b|)^n$ și $|a-b|^n=\big||a|-|b|\big|^n$, dacă $ab\ge0$, iar în cazul $ab\le0$ avem $|a+b|^n=\big||a|-|b|\big|^n$ și $|a-b|^n=(|a|+|b|)^n$. Prin urmare, egalitatea din enunț are loc pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$
....**2p**

3. Fie patrulaterul $ABCD$ înscris în cercul de centru O şi punctele $M\in(AB)$, $N\in(BC)$, $P\in(CD)$, $T\in(AD)$ astfel încât $\frac{PC}{DC}=\frac{NB}{CB}=\frac{MA}{AB}=\frac{TA}{AD}=m$. Notăm cu H ortocentrul triunghiului PNM şi cu G centrul de greutate al triunghiului TBC. Arătaţi că O este centrul cercului circumscris triunghiului PNM dacă şi numai dacă $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

Anca Andrei, Suceava

Soluție și barem: Fixăm polul în O și avem: $\vec{r}_P=(1-m)\vec{r}_C+m\vec{r}_D$, $\vec{r}_N=(1-m)\vec{r}_B+m\vec{r}_C$, $\vec{r}_M=(1-m)\vec{r}_A+m\vec{r}_B$, $\vec{r}_T=(1-m)\vec{r}_A+m\vec{r}_D$ **3p**

Punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului PNM dacă şi numai dacă $\vec{r}_H = \vec{r}_P + \vec{r}_N + \vec{r}_M \Leftrightarrow$

$\vec{r}_H = (1-m)\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + m\vec{r}_D \Leftrightarrow \vec{r}_H = \vec{r}_T + \vec{r}_B + \vec{r}_C \Leftrightarrow \vec{r}_H = 3\vec{r}_G \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ **4p**

4. În triunghiul ABC, $D \in (BC), E \in (CA)$ și $F \in (AB)$ sunt picioarele bisectoarelor interioare. Să se demonstreze că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AF} = \vec{0}$.

Dan Popescu, Suceava

<u>Soluție și barem:</u> Dacă ABC este triunghi echilateral, atunci avem $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ și $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, de unde rezultă că $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = \vec{0}$ **2p**

Reciproc, cu notațiile uzuale $a = BC,\ b = CA,\ c = AB,$ din teorema bisectoarei se deduc relațiile $\frac{BD}{BC} = \frac{c}{b+c}, \frac{CE}{AC} = \frac{a}{a+c}$ și $\frac{AF}{AB} = \frac{b}{a+b}$, traduse vectorial în $\overrightarrow{BD} = \frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CE} = \frac{a}{a+c}\overrightarrow{CA}$ și respectiv $\overrightarrow{AF} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

.... **2p**

Vectorul nul $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AF}$ se exprimă în baza $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ astfel:

$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AF} = \left(\frac{b}{a+b} - \frac{c}{b+c}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{b+c} - \frac{a}{a+c}\right)\overrightarrow{AC}$ **1p**

Atunci anularea scalarilor de reprezentare conduce la $\frac{b}{a+b} = \frac{c}{b+c}$ și $\frac{c}{b+c} = \frac{a}{a+c}$, care se transformă în $b^2 = ac$ și $c^2 = ab$. Rezultă că $b^3 = c^3 = abc$, de unde $a = b = c$.

.... **2p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.