OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 15 februarie 2025
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a XII-a

1. a) (3p) Arătați că oricare ar fi două numere reale $x, y \in (-\infty, 1)$ are loc inegalitatea $\dfrac{2024 - xy}{2025 - x - y} < 1$.

b) (4p) Pe mulțimea $M = (-\infty, 1)$ se consideră legea de compoziție $x * y = \dfrac{2024 - xy}{2025 - x - y}$.

Demonstrați că legea „$*$” este comutativă și asociativă, dar **nu** are element neutru.

Gazeta Matematică

<u>Soluție:</u> **a)** Pentru orice $x, y \in (-\infty, 1)$, avem $x + y < 2 < 2025$, deci $2025 - x - y > 0$, prin urmare inegalitatea ce trebuie demonstrată este echivalentă cu $2024 - xy < 2025 - x - y$. Ultima inegalitate devine $(x-1)(y-1) > 0$ și este evident adevărată deoarece $x - 1 < 0$ și $y - 1 < 0$.

b) Pentru orice $x, y \in M$ avem $y * x = \dfrac{2024 - yx}{2025 - y - x} = \dfrac{2024 - xy}{2025 - x - y} = x * y$, prin urmare legea „$*$” este comutativă.

În continuare, observăm că pentru orice $x, y, z \in M$ avem:

$$(x * y) * z = \frac{2024 - \dfrac{2024 - xy}{2025 - x - y} \cdot z}{2025 - \dfrac{2024 - xy}{2025 - x - y} - z} = \frac{2024 \cdot 2025 - 2024(x + y + z) + xyz}{2025^2 - 2024 - 2025(x + y + z) + xy + yz + zx} \quad \text{și}$$

$$x * (y * z) = \frac{2024 - x \cdot \dfrac{2024 - yz}{2025 - y - z}}{2025 - x - \dfrac{2024 - yz}{2025 - y - z}} = \frac{2024 \cdot 2025 - 2024(x + y + z) + xyz}{2025^2 - 2024 - 2025(x + y + z) + xy + yz + zx}.$$

Rezultă $(x * y) * z = x * (y * z)$, pentru orice $x, y, z \in M$, prin urmare legea „$*$” este asociativă.

Dacă legea de compoziție „$*$” ar avea element neutru, atunci ar exista $\theta \in M$ cu proprietatea că $x * \theta = x$, pentru orice $x \in M$. În particular ar trebui să avem $\theta * \theta = \theta$, adică $\dfrac{2024 - \theta^2}{2025 - 2\theta} = \theta$, iar de aici obținem $\theta^2 - 2025 \cdot \theta + 2024 = 0$. Această ecuație are două soluții reale: $\theta_1 = 1 \notin M$ și $\theta_2 = 2024 \notin M$. Rezultă că „$*$” nu admite element neutru.

<u>Barem.</u>

a) Pentru orice $x, y \in (-\infty, 1)$, avem deci $2025 - x - y > 0$	1p
Arată că $\dfrac{2024 - xy}{2025 - x - y} < 1 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) > 0$ care e adevărată pentru orice $x, y < 1$	2p
b) Demonstrează că legea de compoziție „$*$” este comutativă	1p
Demonstrează că legea de compoziție „$*$” este asociativă	2p
Demonstrează că legea de compoziție „$*$” nu admite element neutru	1p

2. Se consideră $m,n\in\mathbb{R}$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x+1}{\mathrm{e}^x+2x^2+2x+4}, & x\in(-\infty,0)\\ \dfrac{mx+n}{x+5}, & x\in[0,\infty)\end{cases}$.

a) (3p) Determinați toate perechile (m,n) pentru care funcția f admite primitive.

b) (4p) Pentru $m=0$ și $n=1$, determinați o primitivă F a lui f cu proprietatea că $F(0)=0$.

Iuliana Șalar și *Anca Tudose,* Câmpulung Moldovenesc

Soluție: **a)** Avem $f(0-0)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{x^2-x+1}{\mathrm{e}^x+2x^2+2x+4}=\dfrac{1}{5}$, $f(0+0)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{mx+n}{x+5}=\dfrac{n}{5}$ și $f(0)=\dfrac{n}{5}$.

Dacă $n\neq1$, atunci $x_0=0$ este punct de discontinuitate de speța I pentru f. Rezultă că funcția f nu are proprietatea lui Darboux, deci f nu admite primitive.

Dacă $n=1$ și $m\in\mathbb{R}$, avem $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$, deci f este continuă în punctul $x_0=0$. Cum funcția f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,\infty)$, rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$, prin urmare f admite primitive.

b) Pentru $m=0$ și $n=1$ avem $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x+1}{\mathrm{e}^x+2x^2+2x+4}, & x\in(-\infty,0)\\ \dfrac{1}{x+5}, & x\in[0,\infty)\end{cases}$ și conform punctului a) funcția f admite primitive.

Pentru $x\in(-\infty,0)$, notăm $I=\displaystyle\int\frac{x^2-x+1}{\mathrm{e}^x+2x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x$ și $J=\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^x+x^2+3x+3}{\mathrm{e}^x+2x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x$. Observăm că $I+J=\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^x+2x^2+2x+4}{\mathrm{e}^x+2x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x=x+\mathcal{C}$ și că $J-I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^x+4x+2}{\mathrm{e}^x+2x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x=\ln\left(\mathrm{e}^x+2x^2+2x+4\right)+\mathcal{C}$.

Scăzând aceste relații obținem $I=\dfrac{1}{2}\left(x-\ln\left(\mathrm{e}^x+2x^2+2x+4\right)\right)+\mathcal{C}$

Mai observăm că, pentru $x\in(0,\infty)$ avem $\displaystyle\int\frac{1}{x+5}\,\mathrm{d}x=\ln(x+5)+\mathcal{C}$, prin urmare primitiva căutată va fi de forma $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(x-\ln\left(\mathrm{e}^x+2x^2+2x+4\right)\right)+k_1, & x\in(-\infty,0)\\ 0, & x=0\\ \ln(x+5)+k_2, & x\in(0,\infty)\end{cases}$.

În mod necesar F trebuie să fie continuă în 0, deci $F(0-0)=F(0)=F(0+0)$, iar de aici obținem $-\dfrac{1}{2}\ln5+k_1=0=\ln5+k_2$. Rezultă $k_1=\dfrac{1}{2}\ln5$ și $k_2=-\ln5$.

Se verifică imediat că primitiva căutată este funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(x-\ln\left(e^x+2x^2+2x+4\right)+\ln 5\right), & x\in(-\infty,0)\\ 0, & x=0\\ \ln(x+5)\ -\ln 5, & x\in(0,\infty)\end{cases}.$$

Barem.

a) Arată că $f(0-0)=\frac{1}{5}$, $f(0+0)=\frac{n}{5}$ și $f(0)=\frac{n}{5}$	1p
Demonstrează că pentru $n\neq 1$ funcția f nu admite primitive	1p
Demonstrează că pentru $n=1$ și $m\in\mathbb{R}$ funcția f admite primitive	1p
b) $\int\frac{x^2-x+1}{e^x+2x^2+2x+4}dx=\frac{1}{2}\left(x-\ln\left(e^x+2x^2+2x+4\right)\right)+\mathcal{C}$	2p
Finalizare	2p

3. (7p) Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$ și funcțiile integrabile $f,g:[0,1]\to[a,b]$. Știind că $\int_0^1 f(x)dx\leq\frac{a+b}{2}$ și că $\int_0^1 g(x)dx\leq\frac{a+b}{2}$, demonstrați că $\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx\leq\frac{a^2+b^2}{2}$.

Ion Bursuc, Suceava

Soluție. Cum $a\leq f(x)\leq b$ și $a\leq g(x)\leq b$, rezultă $\left(f(x)-a\right)\left(g(x)-b\right)\leq 0$, pentru orice $x\in[0,1]$. Deducem că $f(x)\cdot g(x)\leq a\cdot g(x)+b\cdot f(x)-ab$, pentru orice $x\in[0,1]$. Prin integrare, obținem

$$\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx\leq a\cdot\int_0^1 g(x)dx+b\cdot\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 ab\,dx\leq a\cdot\frac{a+b}{2}+b\cdot\frac{a+b}{2}-ab=\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Barem.

Demonstrează că $f(x)\cdot g(x)\leq a\cdot g(x)+b\cdot f(x)-ab$, pentru orice $x\in[0,1]$	4p
Finalizare	3p

4. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit cu elementul neutru e. Știm că acest grup G admite un subgrup propriu H cu proprietatea că $x^2=e$, pentru orice $x\in G\setminus H$.

a) (3p) Arătați că există un astfel de grup.

b) (4p) Dacă $\mathrm{ord}(G)>2\cdot\mathrm{ord}(H)$, arătați că grupul G este comutativ.

Gazeta Matematică

Soluție: **a)** Considerăm $G=S_3$ grupul permutărilor de gradul 3 și T mulțimea transpozițiilor din S_3. Avem $\mathrm{ord}(G)=3!=6$ și $T=\{\tau_1,\tau_2,\tau_3\}$, unde $\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$, $\tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ și $\tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$. Știm că $\tau^2=e$, pentru orice $\tau\in T$. Notăm $e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ și $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$. Atunci $\sigma^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$, prin urmare $G=\{e,\sigma,\sigma^2,\tau_1,\tau_2,\tau_3\}$.

Fie $H=\{e,\sigma,\sigma^2\}$. Evident H este subgrup propriu al lui G și $x^2=e$, pentru orice $x\in G\setminus H$.

b) Dacă $a \in H$ și $x \in G \setminus H$, atunci $ax \in G \setminus H$, deci $(ax)^2 = e$, adică $axax = e$. Multiplicând, la dreapta, mai întâi cu x apoi cu a^{-1} obținem $ax = xa^{-1}$, (1). Aici multiplicăm la stânga cu a^{-1}, iar la dreapta cu a și obținem $xa = a^{-1}x$, (2).

Pentru $u \in G \setminus H$ considerăm funcția $f_u : H \to G \setminus H$, unde $f_u(x) = ux$. Funcția f_u este bine definită, iar din ipoteza $\text{ord}(G) > 2 \cdot \text{ord}(H)$ deducem că f_u nu este surjectivă, deci există $v \in G \setminus H$ pentru care $v \notin \text{Im}(f_u)$. Dacă $uv \in H$, atunci $v = u^2v = u(uv) \in \text{Im}(f_u)$, fals, deci $uv \in G \setminus H$.

Pentru orice $a \in H$ avem $(uv)a^{-1} \overset{(1)}{=} a(uv) = (au)v \overset{(1)}{=} (ua^{-1})v = u(a^{-1}v) \overset{(2)}{=} u(va) = (uv)a$, deci $a = a^{-1}$. Rezultă că $a^2 = e$, pentru orice $a \in H$.

În concluzie, avem $x^2 = e$ pentru orice $x \in G$, deci G este comutativ.

Barem.

a) Prezintă și argumentează un exemplu de grup cu proprietatea cerută	3p
b) Obține relațiile (1) și (2)	1p
Demonstrează că $a^2 = e$, pentru orice $a \in H$	2p
Finalizare	1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.