OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 15 februarie 2025
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a XI-a

1. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) (4p) Determinați suma elementelor matricei A^{2024}.

b) (3p) Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $AXA = I_2$.

Gazeta Matematică

Soluție: **a)** Prin calcul direct se obține $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ și $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Observăm că $A^3 = -I_2$, iar de aici obținem $A^6 = I_2$. Rezultă că $A^{2024} = \left(A^6\right)^{337} \cdot A^2 = A^2$, prin urmare suma elementelor matricei A^{2024} este egală cu 1.

b) Înmulțind la stânga și la dreapta cu A^5, ecuația devine $A^6 XA^6 = A^5 I_2 A^5$, de unde $X = A^{10}$. Cum $A^{10} = A^6 \cdot A^3 \cdot A$, deducem că $X = -A$. Așadar, $X = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ este singura soluție a ecuației date.

Barem.

a) Calculează $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ și $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	1p
Obține $A^6 = I_2$	1p
Demonstrează că $A^{2024} = A^2$	1p
Finalizare	1p
b) Obține $X = A^{10}$	2p
$X = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ este singura soluție a ecuației date	1p

2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și A^t transpusa lui A. Spunem că matricea A are proprietatea $(\mathcal{P})$ dacă verifică egalitatea $\det\left(A - \mathrm{i}A^t\right) = \mathrm{i} \cdot \det\left(\mathrm{i}A + A^t\right)$.

a) (3p) Arătați că orice matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ are proprietatea $(\mathcal{P})$.

b) (4p) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Știind că matricea A are proprietatea $(\mathcal{P})$, demonstrați că $\det(A) = \dfrac{(b-c)^2}{2}$.

Dan Popescu, Suceava

Soluție: **a)** Pentru orice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ avem succesiv:

$\det\left(A - \mathrm{i}A^t\right) = \det\left(-\mathrm{i}\left(A^t - \frac{1}{\mathrm{i}}A\right)\right) = (-\mathrm{i})^3 \det\left(A^t + \mathrm{i}A\right) = \mathrm{i} \cdot \det\left(\mathrm{i}A + A^t\right)$, deci A are proprietatea $(\mathcal{P})$.

b) La fel ca la punctul a), pentru orice matrice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ avem egalitățile:

$$\det\left(A-\mathrm{i}A^t\right)=\det\left(-\mathrm{i}\left(A^t-\frac{1}{\mathrm{i}}A\right)\right)=(-\mathrm{i})^2\det\left(A^t+\mathrm{i}A\right)=-\det\left(\mathrm{i}A+A^t\right).$$

Dacă $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ are proprietatea $(\mathcal{P})$, deducem că $\mathrm{i}\cdot\det\left(\mathrm{i}A+A^t\right)=-\det\left(\mathrm{i}A+A^t\right)$, de unde obținem $(1+\mathrm{i})\cdot\det\left(\mathrm{i}A+A^t\right)=0$, deci $\det\left(\mathrm{i}A+A^t\right)=0$. Înlocuind $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ în ultima egalitate, obținem $\begin{vmatrix} a(1+\mathrm{i}) & c+\mathrm{i}b\\ b+\mathrm{i}c & d(1+\mathrm{i})\end{vmatrix}=0$, adică $\left(2ad-b^2-c^2\right)\mathrm{i}=0$, de unde $ad=\dfrac{b^2+c^2}{2}$.

În concluzie, $\det(A)=ad-bc=\dfrac{b^2+c^2}{2}-bc=\dfrac{(b-c)^2}{2}$.

Barem.

a) Obține egalitatea $\det\left(A-\mathrm{i}A^t\right)=\det\left(-\mathrm{i}\left(A^t-\frac{1}{\mathrm{i}}A\right)\right)=(-\mathrm{i})^3\det\left(A^t+\mathrm{i}A\right)$	2p
Finalizare	1p
b) Demonstrează că $\det\left(\mathrm{i}A+A^t\right)=0$	2p
Obține relația $ad=\dfrac{b^2+c^2}{2}$	1p
Finalizare	1p

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale cu proprietatea că șirul $\left(a_n^2+2a_n+2025\right)_{n\geq 1}$ este convergent.

a) (3p) Dacă $a_n\geq -1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

b) (4p) Dați exemplu de un șir divergent cu proprietatea din enunț.

Mihai Piticari și *Vladimir Cerbu*, Câmpulung Moldovenesc

Soluție. **a)** Considerăm șirul $(b_n)_{n\geq 1}$, unde $b_n=a_n^2+2a_n+2025$ și notăm $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, $b\in\mathbb{R}$. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $b_n=(a_n+1)^2+2024$, de unde obținem $b_n\geq 2024$ și $|a_n+1|=\sqrt{b_n-2024}$. Cum $a_n\geq -1$, deducem că $|a_n+1|=a_n+1$, deci $a_n=-1+\sqrt{b_n-2024}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-1+\sqrt{b_n-2024}\right)=-1+\sqrt{b-2024}\in\mathbb{R}$, adică șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

b) Considerăm șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\begin{cases} 0, & \text{pentru } n \text{ par}\\ -2, & \text{pentru } n \text{ impar}\end{cases}$. Deoarece $a_{2n}\to 0$ și $a_{2n-1}\to -2$, deducem că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ nu are limită, prin urmare este șir divergent. Pe de altă parte, cum $b_n=a_n(a_n+2)+2025$, rezultă $b_n=2025$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2025$, adică șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Barem.

a) Demonstrează că $a_n=-1+\sqrt{b_n-2024}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$	2p
Finalizare	1p
b) Construiește un exemplu de șir $(a_n)_{n\geq 1}$ cu proprietățile cerute	2p
Justifică faptul că $(a_n)_{n\geq 1}$ este divergent, iar $\left(a_n^2+2a_n+2025\right)_{n\geq 1}$ este convergent	2p

4. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 \in (0,1)$ și $x_{n+1} = x_n - \operatorname{arctg}(\sin^2 x_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) (3p) Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent la zero.

b) (4p) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}(n \cdot x_n)$.

Anca Andrei, Suceava

<u>Soluție:</u> **a)** Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $x_{n+1} - x_n = -\operatorname{arctg}(\sin^2 x_n) \leq 0$, prin urmare $(x_n)_{n\geq 1}$ este șir descrescător. Rezultă $x_n \leq x_1 < 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Din ipoteză avem $x_1 > 0$ și vom demonstra prin inducție că $x_n > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Presupunem $x_k > 0$, unde $k \in \mathbb{N}^*$. Ținând cont că funcția tangentă este strict crescătoare pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, avem succesiv: $x_{k+1} > 0 \Leftrightarrow \operatorname{arctg}(\sin^2 x_k) < x_k \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sin^2 x_k < \operatorname{tg} x_k \Leftrightarrow \sin x_k \cdot \cos x_k < 1 \Leftrightarrow \sin 2x_k < 2$, evident adevărat, iar inducția este completă. Deducem că $x_n \in (0,1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton și mărginit, din teorema lui Weierstrass rezultă că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$. Evident $\ell \in [0,1]$ și, trecând la limită în relația de recurență, obținem $\ell = \ell - \operatorname{arctg}(\sin^2 \ell) = 0$, de unde rezultă $\ell = 0$.

b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $\operatorname{tg} x_{n+1} = \operatorname{tg}\left(x_n - \operatorname{arctg}(\sin^2 x_n)\right) = \dfrac{\operatorname{tg} x_n - \sin^2 x_n}{1 + \operatorname{tg} x_n \cdot \sin^2 x_n}$, prin urmare

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x_{n+1}} - \frac{1}{\operatorname{tg} x_n} = \frac{1 + \operatorname{tg} x_n \cdot \sin^2 x_n}{\operatorname{tg} x_n - \sin^2 x_n} - \frac{1}{\operatorname{tg} x_n} = \frac{\sin^2 x_n \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x_n)}{\operatorname{tg} x_n \cdot (\operatorname{tg} x_n - \sin^2 x_n)} = \frac{\operatorname{tg} x_n}{\operatorname{tg} x_n - \sin^2 x_n} = \frac{1}{1 - \sin x_n \cdot \cos x_n}.$$

Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x_{n+1}} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1 - \sin x_n \cdot \cos x_n} = 1$. În continuare, folosind criteriul Stolz-Cesaro, obținem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n \cdot \operatorname{tg} x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\operatorname{tg} x_n}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\operatorname{tg} x_{n+1}} - \frac{1}{\operatorname{tg} x_n}}{n+1-n} = 1$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}(n \cdot \operatorname{tg} x_n) = 1$.

În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty}(n \cdot x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(n \cdot \operatorname{tg} x_n) \cdot \dfrac{x_n}{\operatorname{tg} x_n} = 1 \cdot 1 = 1$.

<u>Barem.</u>

a) Demonstrează că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător	1p
Demonstrează că $x_n \in (0,1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$	1p
Demonstrează că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$	1p
b) Demonstrează că $\lim\limits_{n\to\infty}(n \cdot \operatorname{tg} x_n) = 1$	3p
Finalizare	1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.