OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 15 februarie 2025
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE-CLASA a X-a

1. Rezolvați în mulțimea $(0,\infty)$ ecuația $\sqrt[4]{x\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt[7]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt[12]{x\sqrt{x}}}=6$.

Traian Tămâian, S. G. M. 10/2024

<u>Soluție și barem</u>: Ecuația este echivalentă cu:

$$\sqrt[12]{x\sqrt{x}}\cdot\sqrt[4]{x\sqrt{x}}-\sqrt[7]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=6\cdot\sqrt[12]{x\sqrt{x}}\Leftrightarrow\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{12}}\cdot\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}-\left(x\cdot\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{7}}=6\cdot\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{12}}\Leftrightarrow$$

$$x^{\frac{3}{8}}\cdot x^{\frac{1}{8}}-\left(x^{1+\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{7}}=6\cdot x^{\frac{1}{8}}\Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}=6\cdot x^{\frac{1}{8}}$$ **4p**

Notăm $x^{\frac{1}{8}}=t,t\in(0,+\infty)$ și ecuația se scrie $t^4-t^2-6t=0\Leftrightarrow t(t-2)(t^2+2t+3)=0$, cu soluția reală pozitivă $t=2$ **2p**
Apoi $t=2\Leftrightarrow x=2^8=256$, deci mulțimea soluțiilor este $S=\{256\}$.

2. Să se demonstreze că dacă $x,y,z\in(0,1)$ sau $x,y,z\in(1,\infty)$ atunci are loc inegalitatea:

$$\log_x yz+\log_y xz+\log_z xy\geq 3+2(\log_{yz}x+\log_{xz}y+\log_{xy}z).$$

Anca Andrei, Suceava

<u>Soluție și barem</u>:

Din ipoteză rezultă că toţi logaritmii care apar în inegalitate sunt strict pozitivi..............................**1p**

Utilizând inegalitatea $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b},(\forall)a,b>0$ obţinem $\frac{1}{\log_{xyz}x}+\frac{1}{\log_{xyz}y}\geq\frac{4}{\log_{xyz}xy}\Leftrightarrow$

$$\log_x x+\log_x yz+\log_y y+\log_y xz\geq 4\left(1+\log_{xy}z\right)\Leftrightarrow\log_x yz+\log_y xz\geq 2+4\log_{xy}z.$$

Analog se obţin inegalităţile: $\log_y xz+\log_z xy\geq 2+4\log_{yz}x$ și $\log_x yz+\log_z xy\geq 2+4\log_{xz}y$.

....**4p**

Adunăm ultimele trei inegalități și rezultă

$\log_x yz+\log_y xz+\log_z xy\geq 3+2(\log_{yz}x+\log_{xz}y+\log_{xy}z)$ **2p**

3. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisface proprietatea $f\left(f\left(x\right)\right)=x^2+3x+1,\forall x\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $f(-1)$;

b) Să se demonstreze că funcția f nu este funcție injectivă;

c) Să se demonstreze că nici funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică $g(x)=x^2-3xf(x)+1$ nu este injectivă.

Dan Popescu, Suceava

<u>*Soluție și barem:*</u> a) Din ipoteză se obține $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=f\left(x^2+3x+1\right)$ și

$f\left(f\left(f(x)\right)\right)=f(x)^2+3f(x)+1$, de unde $f\left(x^2+3x+1\right)=f(x)^2+3f(x)+1, \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

$x=-1\Rightarrow f(-1)=\left(f(-1)\right)^2+3f(-1)+1\Rightarrow\left(f(-1)+1\right)^2=0\Rightarrow f(-1)=-1.$

....**2p**

b) Presupunem că f este funcție injectivă, deci $f\circ f$ este funcție injectivă, absurd, fiind o funcție de gradul al doilea cu domeniul $\mathbb{R}$ **2p**

c) Înlocuim $x=-2$ în relația (1) și obținem $-1=f(-1)=\left(f(-2)\right)^2+3f(-2)+1\Rightarrow$

$f(-2)\in\{-2,-1\}$. **1p**

Dacă $f(-2)=-2\Rightarrow f\left(f(-2)\right)=f(-2)=-2.$ Pe de altă parte,

$f\left(f(-2)\right)=\left(f(-2)\right)^2+3f(-2)+1=(-2)^2+3\cdot(-2)+1=-1$, contradicție. Rezultă în mod necesar $f(-2)=-1$. Se obține $g(-2)=g(-1)=-1$, adică g nu este funcție injectivă..............................**2p**

4. a) Fie $a,b\in(0,\infty), a\neq b$ și numerele complexe z_1,z_2, cu $bz_1+az_2\neq 0$. Demonstrați că numărul $z=\dfrac{az_1+bz_2}{bz_1+az_2}$ are modulul egal cu 1 dacă și numai dacă $|z_1|=|z_2|$.

b) Demonstrați că $\left|\dfrac{az_1|z_2|+b|z_1|z_2}{bz_1|z_2|+a|z_1|z_2}+\dfrac{bz_1|z_2|+a|z_1|z_2}{az_1|z_2|+b|z_1|z_2}\right|\leq 2$, pentru orice $a,b\in(0,\infty), a\neq b$ și $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ care nu anulează numitorii.

Ion Bursuc, Suceava

<u>*Soluție și barem:*</u> a) $|z|=1\Leftrightarrow|az_1+bz_2|=|bz_1+az_2|\Leftrightarrow(az_1+bz_2)\left(\overline{az_1+bz_2}\right)=(bz_1+az_2)\left(\overline{bz_1+az_2}\right)\Leftrightarrow$

$a^2|z_1|^2+ab\left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\right)+b^2|z_2|^2=b^2|z_1|^2+ab\left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\right)+a^2|z_2|^2\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)|z_1|^2=\left(a^2-b^2\right)|z_2|^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|z_1|=|z_2|$..**4p**

b)Folosind rezultatul de la punctul a) obținem:

$\left|\dfrac{az_1|z_2|+b|z_1|z_2}{bz_1|z_2|+a|z_1|z_2}+\dfrac{bz_1|z_2|+a|z_1|z_2}{az_1|z_2|+b|z_1|z_2}\right|\leq\left|\dfrac{az_1|z_2|+b|z_1|z_2}{bz_1|z_2|+a|z_1|z_2}\right|+\left|\dfrac{bz_1|z_2|+a|z_1|z_2}{az_1|z_2|+b|z_1|z_2}\right|=2$ **3p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.