CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 15 FEBRUARIE 2025
CLASA a IX-a

H2 **Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. a) Arătaţi că $[x]+[-x]=0$ dacă și numai dacă $x\in\mathbb{Z}$.

b) Rezolvaţi ecuaţia $\left[\frac{2x}{x+1}\right]+\left[\frac{2}{x+1}\right]=2$.

Supliment G.M.,nr 10,2024

Soluție

a) Fie $x=[x]+\{x\}=k+r, k=[x], r=\{x\}\in[0,1)$.Deducem că $[x]+[-x]=[k+r]+[-k-r]=$
$k+[r]-k+[-r]=[r]+[-r]=\begin{cases}0+0=0, daca\ x\in\mathbb{Z}\\ 0-1=-1, daca\ x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$.

b) Folosind proprietățile cunoscute ale părții întregi , ecuaţia $\left[\frac{2x}{x+1}\right]+\left[\frac{2}{x+1}\right]=2$ se scrie
$\left[\frac{2x}{x+1}-1\right]+\left[\frac{2}{x+1}-1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\frac{x-1}{x+1}\right]+\left[\frac{1-x}{x+1}\right]=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}=k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$x=\frac{-k-1}{k-1}, k\in\mathbb{Z}, k\neq 1.$

Barem

a)	Scrie $x=[x]+\{x\}$	1 p
	Demonstrează că $[x]+[-x]=0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$	2p
b)	Demonstrează că $\left[\frac{2x}{x+1}\right]+\left[\frac{2}{x+1}\right]=2 \Leftrightarrow \left[\frac{x-1}{x+1}\right]+\left[\frac{1-x}{x+1}\right]=0$	2p
	Demonstrează că $\left[\frac{x-1}{x+1}\right]+\left[\frac{1-x}{x+1}\right]=0 \Leftrightarrow x=\frac{-k-1}{k-1}, k\in\mathbb{Z}, k\neq 1.$	2p

2.Demonstraţi că expresia $\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}{1+2+2^2+...+2^n}:\frac{1}{2^n}+\frac{1+3+3^2+...+3^m}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^m}}:3^m$ este constantă ,adică nu depinde de numerele naturale nenule n și m.

Soluție

Folosind formula pentru suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice,adică formula

$S_n=b_1\frac{q^n-1}{q-1}=b_1\frac{1-q^n}{1-q}, q\neq 1$, obținem: $\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}{1+2+2^2+...+2^n}:\frac{1}{2^n}+\frac{1+3+3^2+...+3^m}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^m}}:3^m=$

$$\frac{\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{2^{n+1}-1}{2-1}}\cdot 2^n+\frac{\frac{3^{m+1}-1}{3-1}}{\frac{1-\frac{1}{3^{m+1}}}{1-\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{3^m}=\frac{\frac{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}}{2^{n+1}-1}\cdot 2^n+\frac{\frac{3^{m+1}-1}{2}}{\frac{\frac{3^{m+1}-1}{3^{m+1}}}{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{1}{3^m}=$$

$$\frac{2^{n+1}-1}{2^n\left(2^{n+1}-1\right)}\cdot 2^n+\frac{3^{m+1}-1}{2}\cdot\frac{2\cdot 3^m}{3^{m+1}-1}\cdot\frac{1}{3^m}=2.$$

Soluție alternativă

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+2+2^2+\ldots+2^n}:\frac{1}{2^n}+\frac{1+3+3^2+\ldots+3^m}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^m}}:3^m=\frac{2^n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)}{1+2+2^2+\ldots+2^n}+$$

$$\frac{1+3+3^2+\ldots+3^m}{3^m\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^m}\right)}=\frac{2^n+\ldots+2^2+2+1}{1+2+2^2+\ldots+2^n}+\frac{1+3+3^2+\ldots+3^m}{3^m+\ldots+3^2+3+1}=2.$$

Barem

	Demonstrează că $\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+2+2^2+\ldots+2^n}:\frac{1}{2^n}=1,\forall n\in\mathbb{N}^*$	3p
	Demonstrează că $\frac{1+3+3^2+\ldots+3^m}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^m}}:3^m=1,\forall m\in\mathbb{N}^*$	3p
	Finalizare	1p

3.a) Dacă $a,b>0$ cu $ab=1$, demonstraţi că $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=1$.

b) Dacă $a,b>0$ cu $ab=1$, demonstraţi că $\frac{2}{a^2+3}+\frac{2}{b^2+3}\le 1$.

Soluție

a) Prin calcul direct : $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{b+1+a+1}{(a+1)(b+1)}=\frac{a+b+2}{ab+b+a+1}=\frac{a+b+2}{b+a+2}=1$.

b) Deoarece $a^2+3=a^2-2a\cdot 1+1^2+2a+2=(a-1)^2+2a+2\ge 2a+2$ și

$b^2+3=b^2-2b\cdot 1+1^2+2b+2=(b-1)^2+2b+2\ge 2b+2$, deducem că,

$$\frac{2}{a^2+3}+\frac{2}{b^2+3}\le\frac{2}{2a+2}+\frac{2}{2b+2}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=1.$$

Barem

a)	Demonstrează că $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=1$	3p
b)	Demonstrează că $a^2+3\ge 2a+2, b^2+3\ge 2b+2,\forall a,b>0$	2p
	Finalizare	2p

4.a) Se consideră triunghiul ABC .Demonstrați că punctul M este mijlocul segmentului $[BC]$ dacă și numai dacă $2\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

b) Fie triunghiul ABC și punctele $M\in(BC), E\in(BM), F\in(MC)$ cu $BE=FC$. Demonstrați că punctul M este mijlocul segmentului $[BC]$ dacă și numai dacă $4\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$.

Soluție

a) Folosim relația lui Chasles :

$2\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 2\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{O}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CM}\Leftrightarrow M$ este mijlocul segmentului $[BC]$.

b) Folosim iarăşi relația lui Chasles :

$4\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\Leftrightarrow 4\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MF}\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{O}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{O}\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=\overrightarrow{O}\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CM}\Leftrightarrow$ M este mijlocul segmentului $[BC]$.

Barem

a)	Demonstrează că $2\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CM}$	2p
	Demonstrează că $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CM}\Leftrightarrow M$ este mijlocul segmentului $[BC]$	1p
b)	Demonstrează că $4\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{O}$	3p
	Finalizare	1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.