CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„*ADOLF HAIMOVICI*”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 15 FEBRUARIE 2025
CLASA a XI-a

H1 **Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_1 = 2$ și $x_{n+1} = x_n + 1 + \sqrt{4x_n + 1}$.

a) (2p) Calculați x_2 și x_3.

b) (3p) Demonstrați, utilizând eventual metoda inducției matematice, că $x_n = n(n+1)$.

c) (2p) Să se determine numărul natural nenul n știind că

$\left[\frac{2x_2}{x_1+x_2}\right]+\left[\frac{2x_3}{x_2+x_3}\right]+...+\left[\frac{2x_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}\right]=2025$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

Ghelbere Mihaela, Câmpulung Moldovenesc

<u>Soluție:</u> a) $x_2 = x_1 + 1 + \sqrt{4x_1+1} = 6$

$x_3 = x_2 + \sqrt{4x_2+1} = 12$

b) Notăm $p(n): x_n = n(n+1), n \in N^*$

$p(1): x_1 = 1\cdot 2$ - adevărată. Presupunem că $p(k)$ este o propoziție adevărată, deci are loc $x_k = k(k+1)$.

Avem $x_{k+1} = x_k + 1 + \sqrt{4x_k+1} = k(k+1)+1+\sqrt{4k(k+1)+1} = k^2+k+1+\sqrt{4k^2+4k+1}$

$= k^2+k+1+\sqrt{(2k+1)^2} = k^2+3k+2 = (k+1)(k+2)$. Deci $p(k+1)$ este adevărată.

$$\left.\begin{matrix} p(1) - \textit{adevărată} \\ p(k) \to p(k+1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow p(n) - \textit{adevărată} \ \forall n \in N^*.$$

Rezultă că $x_n = n(n+1)$.

c) $\left[\frac{2x_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}\right] = \left[\frac{2(n+1)(n+2)}{n(n+1)+(n+1)(n+2)}\right] = \left[\frac{2(n+1)(n+2)}{(n+1)(2n+2)}\right] = \left[\frac{n+2}{n+1}\right]$

$= \left[1+\frac{1}{n+1}\right] = 1, \forall n \in N^*$.

Rezultă că $\left[\frac{2x_2}{x_1+x_2}\right]+\left[\frac{2x_3}{x_2+x_3}\right]+...+\left[\frac{2x_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}\right]=n$. Deci n=2025.

Barem

1 a) $x_2 = x_1 + 1 + \sqrt{4x_1 + 1} = 6$	1 p
$x_3 = x_2 + \sqrt{4x_2 + 1} = 12$	1p
b) Notăm $p(n): x_n = n(n+1), n \in N^*$ $p(1): x_1 = 1 \cdot 2$ - adevărată.	1p
Presupunem că $p(k)$ este o propoziție adevărată, deci are loc $x_k = k(k+1)$. $x_{k+1} = x_k + 1 + \sqrt{4x_k + 1} = k(k+1) + 1 + \sqrt{4k(k+1)+1} = k^2 + k + 1 + \sqrt{4k^2 + 4k + 1}$ $= k^2 + k + 1 + \sqrt{(2k+1)^2} = k^2 + 3k + 2 = (k+1)(k+2)$. Deci $p(k+1)$ este adevărată. $\left.\begin{array}{l} p(1) - \textit{adevărată} \\ p(k) \to p(k+1) \end{array}\right\} \Rightarrow p(n) - \textit{adevărată } \forall n \in N^*$. Rezultă că $x_n = n(n+1)$.	2p
c) $\left[\frac{2x_{n+1}}{x_n + x_{n+1}}\right] = \left[\frac{2(n+1)(n+2)}{n(n+1)+(n+1)(n+2)}\right] = \left[\frac{n+2}{n+1}\right] = \left[1 + \frac{1}{n+1}\right] = 1$	1p
Rezultă că $\left[\frac{2x_2}{x_1 + x_2}\right] + \left[\frac{2x_3}{x_2 + x_3}\right] + \ldots + \left[\frac{2x_{n+1}}{x_n + x_{n+1}}\right] = n$. Deci n=2025	1p

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) (2p) $\sqrt{9x^2 - 18x + 9} + 4(|1 - x| + 1) = 25$.

b) (3p) $\left[\frac{3x+5}{4}\right] = \frac{6x-7}{5}$.

Andronic Aurica Mihaela, Suceava

c) (2p) $[x] + \frac{1}{[x]} = \{x\} + \frac{1}{\{x\}}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

Pogorevici Aura Loreta, Fălticeni

Soluție:

a) $|1 - x| = |-(x-1)| = |x - 1|$, atunci $\sqrt{9(x^2 - 2x + 1)} + 4(|x-1| + 1) = 25 \Leftrightarrow$

$3|x - 1| + 4|x - 1| + 4 = 25 \Leftrightarrow 7|x - 1| = 21 \Leftrightarrow |x - 1| = 3 \Leftrightarrow x \in \{-2, 3\}$

b) Notăm $\frac{6x-7}{5} = k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{5k+7}{6}$,

Ecuația devine $\left[\frac{3x+5}{4}\right] = k \Leftrightarrow \left[\frac{5k+17}{8}\right] = k \Leftrightarrow$

$k \leq \frac{5k+17}{8} < k+1 \Leftrightarrow 8k \leq 5k+17 < 8k+8 \Leftrightarrow 3 < k \leq \frac{17}{3}$, dar $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{4; 5\} \Rightarrow$

$x \in \left\{\frac{9}{2}; \frac{16}{3}\right\}$

c) $\{x\} \in [0,1) \Longrightarrow \{x\} + \frac{1}{\{x\}} > 0 \Longrightarrow [x] > 0$

Scriem ecuația sub forma $([x] - \{x\})\left(1 - \frac{1}{[x]\cdot\{x\}}\right) = 0$
Cazul I: $[x] - \{x\} = 0 \Longrightarrow [x] = \{x\} \Longrightarrow x = 0$ (F) pentru că $x \neq 0$
Cazul II: $1 - \frac{1}{[x]\cdot\{x\}} = 0 \Longrightarrow [x] \cdot \{x\} = 1$
Notăm $[x] = k, k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \{x\} = \frac{1}{k} \Longrightarrow x = k + \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}^*$.

Barem

a) $\lvert 1-x\rvert = \lvert-(x-1)\rvert = \lvert x-1\rvert$, atunci $\sqrt{9(x^2-2x+1)} + 4(\lvert x-1\rvert+1) = 25 \Leftrightarrow 3\lvert x-1\rvert + 4\lvert x-1\rvert + 4 = 25$	1p
$7\lvert x-1\rvert = 21 \Leftrightarrow \lvert x-1\rvert = 3 \Leftrightarrow x \in \{-2, 3\}$	1p
b) $\frac{6x-7}{5} = k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{5k+7}{6}$, atunci ecuația devine $\left[\frac{3x+5}{4}\right] = k \Leftrightarrow \left[\frac{5k+17}{8}\right] = k \Leftrightarrow k \leq \frac{5k+17}{8} < k+1$	1p
$3 < k \leq \frac{17}{3}$, dar $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{4; 5\} \Rightarrow x \in \left\{\frac{9}{2}; \frac{16}{3}\right\}$	1p
c) $\{x\} \in [0,1) \Longrightarrow \{x\} + \frac{1}{\{x\}} > 0 \Longrightarrow [x] > 0$ Scriem ecuația sub forma $([x] - \{x\})\left(1 - \frac{1}{[x]\cdot\{x\}}\right) = 0$	1p
Cazul I: $[x] - \{x\} = 0 \Longrightarrow [x] = \{x\} \Longrightarrow x = 0$ (F) pentru că $x \neq 0$	1p
Cazul II: $1 - \frac{1}{[x]\cdot\{x\}} = 0 \Longrightarrow [x] \cdot \{x\} = 1$ Notăm $[x] = k, k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \{x\} = \frac{1}{k} \Longrightarrow x = k + \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}^*$.	1p

3. „*Să informăm cetățenii*” este un centru de informare foarte activ pe rețelele sociale. Cu câteva zile în urmă a publicat o postare distribuită de 28 persoane; în fiecare din zilele următoare au existat cu 12 distribuiri mai multe decât în ziua precedentă.

a) (3p) Câte persoane au distribuit postarea în primele șapte zi?

b) (4p) Membrii centrului observă că după a 20-a zi numărul distribuirilor scade, în fiecare zi, începând cu a 21-a zi, numărul distribuirilor este jumătate din numărul celor din ziua precedentă. Aflați câte persoane au distribuit postarea, știind că în ultima zi postarea a fost distribuită o singură dată.

Soluție:

a) Notăm cu a_n numărul persoanelor care au distribuit postarea în ziua n.

Avem o progresie aritmetică cu $a_1 = 28$ și $r = 12$. Rezultă că $a_7 = a_1 + 6r = 28 + 6 \cdot 12 = 100$.

Deci $S_7 = \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2} = \frac{(28+100) \cdot 7}{2} = 448$ persoane.

b) Avem $a_{20} = a_1 + 19r = 28 + 19 \cdot 12 = 256 = 2^8$

$a_{21} = 2^7, a_{22} = 2^6, ..., a_{28} = 1$

Numărul distriburilor este:

$S_{20} + 2^7 + 2^6 + ... + 1 = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} + \frac{1(2^8 - 1)}{2-1} = \frac{(28+256) \cdot 20}{2} + 255 = 3095$.

Barem:

a) Notăm cu a_n numărul persoanelor care au distribuit postarea în ziua n $a_1 = 28$ și $r = 12$. Rezultă că $a_7 = a_1 + 6r = 28 + 6 \cdot 12 = 100$.	1p
$S_7 = \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2} = \frac{(28+100) \cdot 7}{2} = 448$	2p
b) $a_{20} = a_1 + 19r = 28 + 19 \cdot 12 = 256 = 2^8$	1p
$a_{21} = 2^7, a_{22} = 2^6, ..., a_{28} = 1$	1p
$S_{20} + 2^7 + 2^6 + ... + 1 = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} + \frac{1(2^8 - 1)}{2-1} = \frac{(28+256) \cdot 20}{2} + 255 = 3095$	2p

4. Fie ABCD un patrulater convex. Considerăm punctele M, N, P, Q, T astfel încât $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{NT} = \overrightarrow{TQ}$.

a) (3p) Demonstrați că $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.

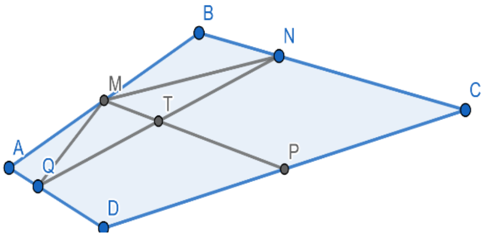
b) (4p) Arătați că punctele M, T, P sunt coliniare.

Andronic Aurica Mihaela, Suceava

Soluție:

a) $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}$

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{PC}$



Rezultă că

$2\overrightarrow{MP}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$

b) Din $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{PC} \Longrightarrow$ P este mijlocul segmentului DC $\Longrightarrow \overrightarrow{MP}=\frac{\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}}{2}$

Din $\overrightarrow{NT}=\overrightarrow{TQ} \Longrightarrow$ T este mijlocul segmentului NQ $\Longrightarrow \overrightarrow{MT}=\frac{\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}}{2}$

$\overrightarrow{MN}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{MB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$ și

$\overrightarrow{MQ}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MD}$

$\overrightarrow{MT}=\frac{\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MD}}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}}{2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MP}$, deoarece $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$

$\overrightarrow{MT}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MP}$, deci M, T, P sunt puncte coliniare.

Barem:

a) $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}$	1p
$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{PC}$	1p
$2\overrightarrow{MP}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$	1p
b) P este mijlocul segmentului DC $\Longrightarrow \overrightarrow{MP}=\frac{\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}}{2}$ T este mijlocul segmentului NQ $\Longrightarrow \overrightarrow{MT}=\frac{\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}}{2}$	1p
$\overrightarrow{MN}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{MB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$ și $\overrightarrow{MQ}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MD}$	2p
$\overrightarrow{MT}=\frac{\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MD}}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}}{2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MP}$, deoarece $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ $\overrightarrow{MT}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MP}$, deci M, T, P sunt puncte coliniare.	1p

Notă: **Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.**