CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„*ADOLF HAIMOVICI*”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 15 FEBRUARIE 2025
CLASA a XII-a
H2 **Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiecte propuse și selectate de *Marinela Cristina Cimpoeșu*, Suceava

1. Pe mulțimea $G=(-2,2)$ se introduce legea “$\circ$”, definită astfel: $x\circ y=\dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{4}}$, pentru orice $x,y\in G$.

a) (2p) Arătați că “$\circ$” este lege de compoziție internă;
b) (3p) Arătați că $(G,\circ)$ este grup;
c) (2p) Rezolvați în mulțimea $G=(-2,2)$ ecuația $x\circ\dfrac{1}{e+1}=\left(4+\dfrac{x}{e+1}\right)^{-1}$, unde e este elementul neutru al legii “$\circ$”.

Soluție: **a)** $x\circ y=\dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{4}}\Leftrightarrow\dfrac{4(x+y)}{4+xy}$, pentru orice $x,y\in G$. Fie $x,y\in G$ și arătăm că $x\circ y\in G$, care este echivalentă cu $-2<\dfrac{4(x+y)}{4+xy}<2$ (1). Din $x,y\in G\Rightarrow x,y\in(-2,2)$, ceea ce este echivalent cu $|x|<2$ și $|y|<2$ (2). Utilizând relațiile (2), rezultă că $|xy|<4\Leftrightarrow -4<xy<4$, de unde găsim relațiile (3) $xy+4>0$ și (4) $xy-4<0$. Pentru prima inegalitate din (1), ținând cont de (3), avem echivalențele $-2<\dfrac{4(x+y)}{4+xy}\Leftrightarrow -1<\dfrac{2(x+y)}{4+xy}\Leftrightarrow xy+2x+2y+4>0\Leftrightarrow(x+2)(y+2)>0$, adevărat deoarece $x>-2$ și $y>-2$. Pentru a doua inegalitate din (1), ținând cont de (3), avem echivalențele $\dfrac{4(x+y)}{4+xy}<2\Leftrightarrow\dfrac{2(x+y)}{4+xy}<1\Leftrightarrow xy-2x-2y+4>0\Leftrightarrow(x-2)(y-2)>0$, adevărat deoarece $x<2$ și $y<2$. Așadar, pentru orice $x,y\in G\Rightarrow x\circ y\in G$, deci “$\circ$” este lege de compoziție internă.

b) Se verifică, prin calcul, că $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$, pentru orice $x,y,z\in G$, adică legea “$\circ$” este asociativă.

Se arată că există $e\in G$ astfel încât $x\circ e=e\circ x=x$, pentru orice $x\in G$. Se verifică mai întâi că $x\circ e=e\circ x$, pentru orice $x\in G$, iar din $x\circ e=x$, pentru orice $x\in G$, rezultă că $\dfrac{4(x+e)}{4+xe}=x$. Efectuând calculele vom găsi că $4x+4e=4x+x^2e\Leftrightarrow(x^2-4)e=0$. Deoarece $x\in(-2,2)$, rezultă că $e=0$. Adică legea admite ca element neutru pe $e=0$.

Pentru orice $x\in G$ se arată că există $x'\in G$ astfel încât $x\circ x'=x'\circ x=e$. Se verifică mai întâi că $x\circ x'=x'\circ x$, iar din $x'\circ x=e$ rezultă că $\dfrac{4(x'+x)}{4+x'x}=0$. Efectuând calculele vom găsi că $x'+x=0$, de unde $x^{'}=-x$. Deoarece $x\in(-2,2)$, rezultă că și $x^{'}\in(-2,2)$. Adică legea admite ca elemente simetrizabile, numerele de forma $x^{'}=-x$. Așadar, $(G,\circ)$ este grup

c) Pentru $e=0$, ecuația $x\circ\frac{1}{e+1}=\left(4+\frac{x}{e+1}\right)^{-1}$ devine $x\circ 1=(4+x)^{-1}$, care este echivalentă cu $\frac{4(x+1)}{4+x}=\frac{1}{4+x}$. Efectuând calculele găsim că $x=-\frac{3}{4}$. Așadar $x=-\frac{3}{4}\in G$ este soluția ecuației date.

Barem

a) Verificare "$\circ$" este lege de compoziție internă	2 p
b) Verificare asociativitate Determină elementul neutru $e=0$ Determină elementele simetrizabile $x^{'}=-x$, pentru orice $x\in G$. Deci $(G,\circ)$ este grup	1 p 1 p 1 p
c) Pentru $e=0$, ecuația $x\circ\frac{1}{e+1}=\left(4+\frac{x}{e+1}\right)^{-1}$ devine $x\circ 1=(4+x)^{-1}$. Rezolvă ecuația și găsește $x=-\frac{3}{4}\in G$ este soluția ecuației	1 p 1 p

2. Pe mulțimea numerelor întregi se introduce legea "$*$", definită astfel: $x*y=\begin{cases} x+y & \text{, dacă } x+y\le 5 \\ 10-(x+y) & \text{, dacă } x+y>5 \end{cases}$.

a) (2p) Arătați că mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5\}$ este parte stabilă a mulțimii numerelor întregi în raport cu operația "$*$";

b) (3p) Arătați că operația indusă pe A de către operația "$*$" nu este asociativă, este comutativă și are element neutru;

c) (2p) Calculați x_n pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, unde $x_1=2$ și $x_n=x_{n-1}*2$, pentru orice $n\ge 2$.

Soluție: **a)** Se alcătuiește tabla operației "$*$" pe A:

*	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	4
2	2	3	4	5	4	3
3	3	4	5	4	3	2
4	4	5	4	3	2	1
5	5	4	3	2	1	0

Din tabla operației se observă că pentru orice $x,y\in A \Rightarrow x*y\in A$, de unde rezultă că A este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu operația "$*$".

b) Deoarece $(2*3)*4=5*4=1$, iar $2*(3*4)=2*3=5 \Rightarrow (2*3)*4\ne 2*(3*4)$, deci legea "$*$" nu este asociativă.

Se observă că tabla operației de la punctul a) este simetrică față de prima diagonală, de unde rezultă că legea "$*$" este comutativă.

Tot din tabla operației pe A se observă că $0*x = x*0 = x$, pentru orice $x \in A$ și deci 0 este element neutru.

c) $x_2 = x_1 * 2 = 2*2 = 4$, $x_3 = x_2 * 2 = 4*2 = 4$. Prin metoda inducției matematice se demonstrează că $x_n = 4$, pentru orice $n \geq 2$.

Barem

a) Se alcătuiește tabla operației "$*$" pe A	1 p
Se observă că pentru orice $x, y \in A \Rightarrow x*y \in A$, de unde rezultă că A este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu operația "$*$"	1 p
b) $(2*3)*4 = 5*4 = 1$, iar $2*(3*4) = 2*3 = 5 \Rightarrow (2*3)*4 \neq 2*(3*4)$, deci legea "$*$" nu este asociativă	1 p
Tabla operației de la punctul a) este simetrică față de prima diagonală, de unde rezultă că legea "$*$" este comutativă	1 p
Se observă că $0*x = x*0 = x$, pentru orice $x \in A$ și deci 0 este element neutru	1 p
c) $x_2 = x_1 * 2 = 2*2 = 4$, $x_3 = x_2 * 2 = 4*2 = 4$	1 p
Prin metoda inducției matematice se demonstrează că $x_n = 4$, pentru orice $n \geq 2$	1 p

3. Se consideră funcția $f:[0,1] \to [1,3], f(x) = x^4 + x^2 + 1$.

a) (3p) Arătați că f este funcţie bijectivă;

b) (2p) Calculați $\int_0^1 \frac{t(2t^2+1)}{f(t)} dt$;

c) (2p) Arătați că $\int_0^x f(\sqrt{t}) dt \leq \frac{11}{6}$, pentru orice $x \in [0,1]$.

Soluție: **a)** Se arată că f este funcţie strict crescătoare pe intervalul $[0,1]$, deci f este funcţie injectivă. f este funcţie continuă pe intervalul $[0,1]$ și $f([0,1]) = [1,3]$, deci f este funcţie surjectivă. Așadar, f este funcţie bijectivă.

b) $\int_0^1 \frac{t(2t^2+1)}{f(t)} dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{4t^3+2t}{t^4+t^2+1} dt = \frac{1}{2}\ln(t^4+t^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3.$

c) $\int_0^x f(\sqrt{t}) dt \leq \frac{11}{6} \Leftrightarrow \int_0^x (t^2+t+1) dt \leq \frac{11}{6} \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \leq \frac{11}{6}$. După calculele aferente inegalitatea devine $2x^3 + 3x^2 + 6x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+5x+11) \leq 0$ și este adevărată pentru orice $x \in [0,1]$.

Barem

a) f este funcţie injectivă	1 p
f este funcţie surjectivă	1 p
f este funcţie bijectivă	1 p

b) $\int_0^1 \frac{t\left(2t^2+1\right)}{f(t)}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{4t^3+2t}{t^4+t^2+1}dt$	1 p
$=\frac{1}{2}\ln\left(t^4+t^2+1\right)\Big\vert_0^1=\frac{1}{2}\ln 3$	1 p
c) $\int_0^x f\left(\sqrt{t}\right)dt\le\frac{11}{6}\Leftrightarrow\int_0^x\left(t^2+t+1\right)dt\le\frac{11}{6}\Leftrightarrow\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\le\frac{11}{6}$	1 p
$\Leftrightarrow 2x^3+3x^2+6x-1\le 0\Leftrightarrow (x-1)\left(2x^2+5x+11\right)\le 0$ și este adevărată pentru orice $x\in[0,1]$	1 p

4. Se consideră funcţia $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, dată prin $f(x)=\frac{x-[x]}{2x-[x]+1}$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.

a) (3p) Demonstraţi că funcţia f nu admite primitive pe intervalul $[0,2]$;

b) (2p) Determinați primitivele funcției f pe un interval $I\subset(0,1)$;

c) (2p) Rezolvați ecuația $f(x)=x-[x]$ pe intervalul $[0,2]$.

Soluție: **a)** Avem că $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2x+1}, & x\in[0,1)\\ \frac{x-1}{2x}, & x\in[1,2)\\ 0, & x=2\end{cases}$. Se arată că $x=1$ este punct de discontinuitate de speţa I $\Rightarrow f$ nu admite primitive pe $[0,2]$.

b) $f(x)=\frac{x}{2x+1}$, pentru orice $x\in I$, *f* este funcție continuă pe *I*, deci *f* admite primitive pe *I*.

$$\int\frac{x}{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{2x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\ln(2x+1)}{2}\right)+C.$$

c) Ecuația $f(x)=x-[x]$ devine $\frac{x-[x]}{2x-[x]+1}=x-[x]\Leftrightarrow(x-[x])([x]-2x)=0$. Din rezolvarea ecuației $x-[x]=0$ se găsesc soluțiile $x=0$, $x=1$ și $x=2$. Iar din rezolvarea ecuației $[x]-2x=0$ se găsesc soluțiile $x=-\frac{1}{2}$ și $x=0$. Așadar, mulțimea de soluții a ecuației este $S=\left\{-\frac{1}{2},0,1,2\right\}$.

Barem

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2x+1}, & x\in[0,1)\\ \dfrac{x-1}{2x}, & x\in[1,2)\\ 0, & x=2\end{cases}$	1 p
$x=1$ este punct de discontinuitate de speţa I $\Rightarrow f$ nu admite primitive pe $[0,2]$.	2 p
b) $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$, pentru orice $x\in I$, *f* este funcție continuă pe *I*, deci *f* admite primitive pe *I*	1 p
$\int\dfrac{x}{2x+1}dx=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{2x}{2x+1}dx=\dfrac{1}{2}\int\left(1-\dfrac{1}{2x+1}\right)dx=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\ln(2x+1)}{2}\right)+C$	1 p
c) $\dfrac{x-[x]}{2x-[x]+1}=x-[x]\Leftrightarrow(x-[x])([x]-2x)=0$	1 p
Din rezolvarea ecuațiilor $[x]-2x=0$ și $[x]-2x=0$ se determină mulțimea de soluții $S=\left\{-\dfrac{1}{2},0,1,2\right\}$.	1 p

Notă: **Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.**