**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**
**„*ADOLF HAIMOVICI*”**
**ETAPA LOCALĂ**
**SUCEAVA - 15 FEBRUARIE 2025**
**CLASA a XII-a**

**H1** **Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

## BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

**1.** . Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x-1}{e^x}, & x<1 \\ \dfrac{\ln^2 x}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$.

a) **(2p)** Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$

b) **(5p)** Să se determine F o primitivă a lui f care verifică relaţia F(0) + F(e) =$4050+\dfrac{e+3}{3e}$.

**Prof. Negrea Daniela**

***Barem***

| | |
|---|---|
| a) $\lim\limits_{x \searrow 1} f(x)=\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x)=f(1)=0 \Rightarrow f$ continuă în $x_0=1$<br>Cum f este funcţie continuă pe $(-\infty,1)$ şi pe $[1,\infty)$, ca rapoarte de funcţii elementare atunci $\Rightarrow$f continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow$ f admite primitive | **1p**<br><br>**1p** |
| b) Fie F o primitivă a lui f $\Rightarrow F(x)=\begin{cases} -xe^{-x}+c_1, x<1 \\ \dfrac{1}{3}\ln^3 x+c_2, x \geq 1 \end{cases}$<br>F derivabilă$\Rightarrow$F continuă$\Rightarrow \lim\limits_{x \searrow 1} F(x)=\lim\limits_{x \nearrow 1} F(x)=F(1) \Rightarrow c_1-\dfrac{1}{e}=c_2=c$ | **3 p** |
| $\Rightarrow F(x)=\begin{cases} -xe^{-x}+c+\dfrac{1}{e}, x<1 \\ \dfrac{1}{3}\ln^3 x+c, x \geq 1 \end{cases}$ | **1p** |
| $F(0)+F(e)=4050+\dfrac{e+3}{3e} \Leftrightarrow c=2025 \Rightarrow F(x)=\begin{cases} -xe^{-x}+2025+\dfrac{1}{e}, x<1 \\ \dfrac{1}{3}\ln^3 x+2025, x \geq 1 \end{cases}$ | **1p** |

**2.** **(7p)** Fie $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)...(x-10)$ . Calculați $I=\int_{11}^{12} \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx$ .

**Prof. Moisuc Niculina Mihaela**

***Barem***

| | |
|---|---|
| Cum $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+...+\dfrac{1}{x-10}$, obținem | **2p** |

| | |
|---|---|
| $I=\int_{11}^{12}\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int_{11}^{12}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+...+\frac{1}{x-10}\right)dx$ <br> $=\left(\ln\lvert x-1\rvert+\ln\lvert x-2\rvert+\ln\lvert x-3\rvert+...+\ln\lvert x-10\rvert\right)\Big\|_{11}^{12}=$ | **4p** |
| $=\ln\frac{11}{10}+\ln\frac{10}{9}+\ln\frac{9}{8}+...+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{2}{1}=\ln\left(\frac{11}{10}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{9}{8}\cdot...\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}\right)=\ln 11$ | **1p** |

**3** Fie mulțimea $G=\{M(x)=A+xB\ /x\in\mathbb{R}^*\}$ unde $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$.

a) **(1p)** Verificați dacă $M(x)\cdot M(y)=M(x\cdot y),\forall x,y\in\mathbb{R}^*$.

b) **(1p)** Demonstrați că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

c) **(3p)**Verificați dacă G este grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

d) **(2p)** Demonstrați că are loc relația $\left(M(3)\right)^{2025}=A^{2025}+3^{2025}\cdot B^{2025}$.

**Prof. Macovei Narcisa**

***Barem***:

| | |
|---|---|
| Verificarea cerinței | **1p** |
| Verificarea cerinței | **1p** |
| Verificarea asociativității<br>Determinarea elementului neutru<br>Determinarea elementelor simetrizabile | **1p**<br>**1p**<br>**1p** |
| Verificarea cerinței | **2p** |

**4.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

a) **(2p)** Să se demonstreze că înmulțirea numerelor reale este distributivă față de legea de compoziție „ $*$”.

b) **(2p)** Să se determine două numere $a,b\notin\mathbb{Q}$ astfel încât $a*b\in\mathbb{Q}$. Există două numere $c,d\in\mathbb{Q}$ astfel încât $c*d\in\mathbb{Q}$?

c) **(3p)** Știind că $x_0\in\mathbb{Q}$ și $x_n=x_0*x_{n-1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, să se determine cel mai mic număr natural de trei cifre astfel încât $x_n\in\mathbb{Q}$ .

**Prof. Niță Daniela Elena**

***Barem :***

| | |
|---|---|
| a) $x\cdot(y*z)=(x\cdot y)*(x\cdot z),\forall x,y,z\in\mathbb{R}$<br>$(x*y)\cdot z=(x\cdot z)*(y\cdot z),\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ | **1p**<br>**1p** |
| b) Determinarea a două numere a, b care verifică cerința.<br>Pentru c=0, d poate avea orice valoare. | **1p**<br>**1p** |
| c) $x_n=x_0\sqrt[3]{n+1},n\in\mathbb{N}^*$<br>Prin inducție matematică se demonstrează forma generală a lui $x_n$.<br>n=124 | **1p**<br>**1p**<br>**1p** |

***Notă:*** **Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.**