CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA – 15 FEBRUARIE 2025
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a XI-a

H2 **Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii**

1) Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) **(1p)** Să se demonstreze că $A(a)+A(-a)=2A(0)$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

b) **(2p)** Să se demonstreze că
$A(a_1)\cdot A(a_2)\cdot\cdot\ldots\cdot A(a_n)=2^{n-1}A(a_1\cdot a_1\cdot\ldots\cdot a_n)$, $\forall a_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$

c) **(4p)** Să se demonstreze că matricea $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot\ldots\cdot A(\log_{1023}1024)$ are toate elementele numere întregi.

Soluție:

a)Se obține prin calcul că $A(a)+A(-a)=2A(0)$, $\forall a\in\mathbb{R}$

b) Folosind metoda inducției matematice se obține
$A(a_1)\cdot A(a_2)\cdot\cdot\ldots\cdot A(a_n)=2^{n-1}A(a_1\cdot a_1\cdot\ldots\cdot a_n)$, $\forall a_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$

c) Folosind b) rezultă $B=2^{1021}\cdot A(\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{1023}1024)$

Se calculează $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{1023}1024=\log_2 1024=10$

Rezultă $B=2^{1021}A(10)$ matrice care are toate elementele numere întregi.

Barem

a)Demonstrează egalitatea $A(a)+A(-a)=2A(0)$, $\forall a\in\mathbb{R}$	**1p**
b)Demonstrează prin metoda inducției matematice egalitatea $A(a_1)\cdot A(a_2)\cdot\ldots\cdot A(a_n)=2^{n-1}A(a_1\cdot a_1\cdot\ldots\cdot a_n)$, $\forall a_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$	**2p**
c)Folosind b) rezultă $B=2^{1021}\cdot A(\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{1023}1024)$	**1p**
Se calculează $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{1023}1024=\log_2 1024=10$	**2p**
Rezultă $B=2^{1021}A(10)$ matrice care are toate elementele numere întregi.	**1p**

2) Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x+2$ și A , B, C trei puncte apartinând graficului funcției f, cu abscisele numere naturale , distincte două câte două.

a) **(4p)** Să se demonstreze că punctele A,B,C nu sunt coliniare.

b) **(3p)** Să se demonstreze că aria triunghiului ABC este un număr natural.

Soluție:

a)Fie $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ și $C(c, f(c))$ trei puncte pe graficul funcției f, unde $a, b, c\in\mathbb{N}$, $a\neq b, b\neq c, c\neq a$.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ c & f(c) & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a^2+3a+2 & 1 \\ b & b^2+3b+2 & 1 \\ c & c^2+3c+2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a^2+3a+2 & 1 \\ b-a & b^2-a^2+3(b-a) & 1 \\ c-a & c^2-a^2+3(c-a) & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a & a^2+3a+2 & 1 \\ 1 & b+a+3 & 0 \\ 1 & c+a+3 & 0 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)\neq 0$$ din condiția $a\neq b, b\neq c, c\neq a$,

De unde rezultă că punctele A,B,C nu sunt coliniare.

b) $A_{[\Delta ABC]}=\frac{1}{2}\cdot|\Delta|$ de unde rezultă că $\Rightarrow A_{[\Delta ABC]}=\frac{1}{2}\cdot|(b-a)(c-a)(c-b)|$

Cum cel puțin două dintre numerele a, b, c au aceeași paritate, diferența lor se divide cu 2, deci Δ este un număr par,prin urmare aria triunghiului ABC este număr natural.

Barem

Se consideră punctele $A(a, f(a)), B(b, f(b)), C(c, f(c))\in G_f, a, b, c\in\mathbb{N}$, $a\neq b, b\neq c, c\neq a$.	**1p**
$\Delta=\begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ c & f(c) & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a^2+3a+2 & 1 \\ b & b^2+3b+2 & 1 \\ c & c^2+3c+2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a^2+3a+2 & 1 \\ b-a & b^2-a^2+3(b-a) & 1 \\ c-a & c^2-a^2+3(c-a) & 1 \end{vmatrix}=$ $=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a & a^2+3a+2 & 1 \\ 1 & b+a+3 & 0 \\ 1 & c+a+3 & 0 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$	**2p**
$\Delta\neq 0$ din condiția $a\neq b, b\neq c, c\neq a$. de unde rezultă că punctele A,B,C nu sunt coliniare	**1p**

$b)A_{[\Delta ABC]}=\frac{1}{2}\cdot\lvert\Delta\rvert$ de unde rezultă că $\Rightarrow A_{[\Delta ABC]}=\frac{1}{2}\cdot\lvert(b-a)(c-a)(c-b)\rvert$	**1p**
Cum cel puțin două dintre numerele a,b,c au aceeași paritate, diferența lor se divide cu 2, deci Δ este un număr par ,prin urmare aria triunghiului este număr natural..	**2p**

3) Pentru orice număr real *a*, se consideră $f(a)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+ax^2+ax+1}-x\right)$.

a) **(4p)** Arătați că $f(a)=\frac{a}{3}$.

b) **(3p)** Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât are loc: $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(n)=f\left(\frac{2025!}{3^{2024}}\right)$.

Soluție:

$$a)\,f(a)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^3}-1\right)}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+1}=\frac{a}{3}$$

$$b)\,f(1)\,f(2)\ldots f(n)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3}\ldots\cdot\frac{n}{3}=\frac{n!}{3^n}$$

$$f\left(\frac{2025!}{3^{2024}}\right)=\frac{2025!}{3^{2025}}\text{ de unde rezultă } n=2025$$

Barem

$a)\,f(a)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^3}-1\right)}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+1}=\frac{a}{3}$	**4p**
$b)\,f(1)\,f(2)\ldots f(n)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3}\ldots\cdot\frac{n}{3}=\frac{n!}{3^n}$	**1p**
$f\left(\frac{2025!}{3^{2024}}\right)=\frac{2025!}{3^{2025}}$	**1p**
Finalizare $n=2025$	**1p**

4) (7p) Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^2 + mx + 3}{x^2 + mx + 4}$, unde $m \in \mathbb{R}$ și D este domeniul maxim de definiție al funcției. Să se determine, în funcție de valorile lui $m \in \mathbb{R}$, asimptotele graficului funcției f.

Soluție:

Deoarece $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$ rezultă că dreapta de ecuație $y = 2$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$ la graficul funcției.

Considerăm ecuația $x^2 + mx + 4$ cu $\Delta = m^2 - 16$.

1) Dacă $m \in (-4, 4) \Rightarrow D = \mathbb{R} \Rightarrow G_f$ nu are asimptote verticale.

2) Dacă $m = -4 \Rightarrow f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

În acest caz $\lim_{x \to 2} f(x) = \infty \Rightarrow$ dreapta de ecuație $x = 2$ este asimptotă verticală la G_f.

3) Dacă $m = 4 \Rightarrow f(x) = \dfrac{2x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

În acest caz $\lim_{x \to -2} f(x) = \infty \Rightarrow$ dreapta de ecuație $x = -2$ este asimptotă verticală la G_f.

4) Dacă $m \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$ ecuația $x^2 + mx + 4 = 0$ are două rădăcini reale distincte $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $(x_1 < x_2)$ $\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$.

Considerând ecuațiile $2x^2 + mx + 3 = 0$ și $x^2 + mx + 4 = 0$, acestea pot avea o rădăcină comună $x = 1$ pentru $m = -5$ sau $x = -1$ pentru $m = 5$.

a) Dacă $m \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty) \setminus \{\pm 5\} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\} \Rightarrow G_f$ are două asimptote verticale $x = x_1$ și $x = x_2$.

b) Dacă $m = -5 \Rightarrow f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 5x + 4} = \dfrac{2x - 3}{x - 4} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$.

În acest caz $\lim_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} f(x) = -\infty$ și $\lim_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} f(x) = +\infty \Rightarrow$ dreapta de ecuație $x = 4$ este asimptotă verticală la G_f.

c) Dacă $m = 5 \Rightarrow f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 + 5x + 4} = \dfrac{2x + 3}{x + 4} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1, -4\}$.

În acest caz $\lim\limits_{\substack{x\to -4\\ x<-4}} f(x) = +\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x\to -4\\ x>-4}} f(x) = -\infty$ $\Rightarrow$ dreapta de ecuație $x=-4$ este asimptotă verticală la G_f .

Barem

Determinarea asimptotei orizontale.	**1p**
1) Dacă $m\in(-4,4)$ $\Rightarrow$ $D=\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ G_f nu are asimptote verticale.	**1p**
2) Dacă $m=-4$ dreapta $x=2$ este asimptotă verticală la G_f .	**1p**
3) Dacă $m=4$ dreapta $x=-2$ este asimptotă verticală la G_f .	**1p**
4) a) Dacă $m\in(-\infty,-4)\cup(4,\infty)\setminus\{\pm5\}$, G_f admite două asimptote verticale.	**1p**
b) Dacă $m=-5$ dreapta $x=4$ este asimptotă verticală la G_f .	**1p**
c) Dacă $m=5$ dreapta $x=-4$ este asimptotă verticală la G_f .	**1p**