CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

„*ADOLF HAIMOVICI*”

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA - 15 FEBRUARIE 2025

CLASA a XI-a

H1 **Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. a) (3p) Fie matricea $A \in M_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) (1p) Considerând determinantul $D(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x-1 & 0 & y-1 \\ x^2+1 & 2 & y^2+1 \end{vmatrix}$, $x, y \in R$, arătați că $D(x,y) = (x-1)(y-1)(x-y)$, $(\forall) x, y \in R$.

c) (3p) Calculați $D(0,1) \cdot D(1,2) \cdot D(2,3)$, apoi rezolvați ecuația $D\left(3^{x-1}, 2^{1-x}\right) = 0$.

Prof. Niculina – Mihaela Moisuc, Rădăuți

Soluție:

a) Observăm că $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + B$. Puterile matricei B sunt :

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^k = O_3, \forall k \geq 3$.

Astfel, $A^n = \left(I_3 + B\right)^n = C_n^0 I_3 + C_n^1 I_3 \cdot B + C_n^2 I_3 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5n & \frac{1}{2}\left(15n^2 - 11n\right) \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$b)D(x,y)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x-1 & 0 & y-1\\ x^2+1 & 2 & y^2+1\end{vmatrix}\overset{C1-C2}{\underset{C3-C2}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ x-1 & 0 & y-1\\ x^2-1 & 2 & y^2-1\end{vmatrix}=(x-1)(y-1)\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ x+1 & 2 & y+1\end{vmatrix}=.$$

$$=(x-1)(y-1)(x-y),\quad \forall x,y\in R$$

c) $D(0,1)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow D(0,1)\cdot D(1,2)\cdot D(2,3)=0$.

Ecuația $D\left(3^{x-1},2^{1-x}\right)=0\Leftrightarrow\left(3^{x-1}-1\right)\left(2^{1-x}-1\right)\left(3^{x-1}-2^{1-x}\right)=0$, cu soluțiile :

$3^{x-1}-1=0\Rightarrow x_1=1,\quad 2^{1-x}-1=0\Rightarrow x_2=1,\quad 3^{x-1}-2^{1-x}=0\Rightarrow 3^{x-1}=2^{1-x}\Rightarrow x_3=1.$

Barem:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3+\begin{pmatrix}0 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=I_3+B$, $B^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 15\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, B^k=O_3, \forall k\geq 3$.	**1p**
$A^n=\left(I_3+B\right)^n=C_n^0 I_3+C_n^1 I_3\cdot B+C_n^2 I_3\cdot B^2=\begin{pmatrix}1 & 5n & \frac{1}{2}\left(15n^2-11n\right)\\ 0 & 1 & 3n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}^*$.	**2p**
b) $D(x,y)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x-1 & 0 & y-1\\ x^2+1 & 2 & y^2+1\end{vmatrix}\overset{C1-C2}{\underset{C3-C2}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ x-1 & 0 & y-1\\ x^2-1 & 2 & y^2-1\end{vmatrix}=(x-1)(y-1)\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ x+1 & 2 & y+1\end{vmatrix}=$ $=(x-1)(y-1)(x-y),\quad \forall x,y\in R$	**1p**
c) $D(0,1)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow D(0,1)\cdot D(1,2)\cdot D(2,3)=0$	**1p**
Ecuația $D\left(3^{x-1},2^{1-x}\right)=0\Leftrightarrow\left(3^{x-1}-1\right)\left(2^{1-x}-1\right)\left(3^{x-1}-2^{1-x}\right)=0$, cu soluțiile : $3^{x-1}-1=0\Rightarrow x_1=1,\quad 2^{1-x}-1=0\Rightarrow x_2=1,\quad 3^{x-1}-2^{1-x}=0\Rightarrow 3^{x-1}=2^{1-x}\Rightarrow x_3=1.$	**2p**

2. (7p) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{ax^2+bx}{x+2}$ să admită asimptotă oblică spre "$+\infty$" dreapta de ecuație $y = -x + 3$.

Aurica Mihaela Andronic, Pârteștii de Jos

Soluție orientativă:

Dreapta de ecuație $y = -x + 3$ este asimptotă oblică spre "$+\infty$" atunci $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ax^2+bx}{x+2} \cdot \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow$

$a = -1$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{-x^2+bx}{x+2} + \mathrm{x}) = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{bx+2x}{x+2} = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x(b+2)}{x+2} = 3 \Leftrightarrow b + 2 = 3 \Leftrightarrow b = 1$

Barem:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ax^2+bx}{x+2} \cdot \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow a = -1$	2p
$\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{-x^2+bx}{x+2} + \mathrm{x}) = 3$	2p
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{bx+2x}{x+2} = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x(b+2)}{x+2} = 3 \Leftrightarrow b + 2 = 3 \Leftrightarrow b = 1$	3p

3. Se dă funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-a}{x}, & pentru\ x > 0 \\ \frac{b-\sqrt{4-2x}}{x}, & pentru\ x < 0 \\ c, & pentru\ x = 0 \end{cases}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) **(3p)** Determinați a, b astfel încât limitele laterale ale funcției în $x_0 = 0$ să fie finite.

b) **(4p)** Determinați a, b, c astfel încât funcția să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

Doina Iuliana Puiu, Siret

***Soluție*:**

a) $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ x<0}} \frac{b-\sqrt{4-2x}}{x} = \frac{b-2}{0_-} \in \mathbb{R}\ \ dacă\ b - 2 = 0 \leftrightarrow b = 2,$

$$\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ x>0}} \frac{\sqrt{1+x}-a}{x} = \frac{1-a}{0_+} \in \mathbb{R}\ \ dacă\ 1 - a = 0 \leftrightarrow a = 1.$$

$b)$Pentru $x \in (-\infty, 0), f\ este\ continuă\ pentru\ orice\ b \in \mathbb{R},$

Pentru $x \in (0, +\infty),\ f\ este\ continuă\ pentru\ orice\ a \in \mathbb{R},$

Funcția este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă este continuă în $x_0 = 0$, Pentru $b = 2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{2-\sqrt{4-2x}}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{(2-\sqrt{4-2x})(2+\sqrt{4-2x})}{x(2+\sqrt{4-2x})} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{2}{2+\sqrt{4-2x}} = \frac{1}{2}$,

Pentru $a = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$,

Funcția este continuă în $x_0 = 0$ dacă $c = \frac{1}{2}$.

În concluzie, funcția este continuă pe $\mathbb{R}$ pentru $a = 1,\ b = 2,\ c = \frac{1}{2}$.

Barem:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{b-\sqrt{4-2x}}{x} = \frac{b-2}{0_-} \in \mathbb{R}\ dacă\ b = 2$	**2p**
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{1+x}-a}{x} = \frac{1-a}{0_+} \in \mathbb{R}\ dacă\ a = 1.$	**1p**
b) Pentru $x \in (-\infty, 0), f\ este\ continuă\ pentru\ orice\ b \in \mathbb{R}$, Pentru $x \in (0, +\infty),\ f\ este\ continuă\ pentru\ orice\ a \in \mathbb{R}$, Funcția este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă este continuă în $x_0 = 0$,	**1p**
Pentru $b = 2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{2-\sqrt{4-2x}}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{(2-\sqrt{4-2x})(2+\sqrt{4-2x})}{x(2+\sqrt{4-2x})} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{2}{2+\sqrt{4-2x}} = \frac{1}{2}$,	**1p**
Pentru $a = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$,	**1p**
În concluzie, funcția este continuă pe $\mathbb{R}$ pentru $a = 1, b = 2, c = \frac{1}{2}$.	**1p**

4. (7p) Fie matricele $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix}, a, b, c$ fiind numere naturale. Câte astfel de matrice au proprietatea că atât suma elementelor de pe diagonala principală, cât și suma elementelor de pe diagonala secundară, este egală cu 7?

Doina Iuliana Puiu, Siret

Soluție:

$a + c + e = b + c + d$ dacă $a + e = b + d$.

Dacă $c = 0$, trebuie să avem $\begin{cases} a + e = 7 \\ b + d = 7 \end{cases}$,

de unde rezultă că perechile de numere naturale (a, e) și (b, d) pot fi alese în câte opt moduri; vom avea în acest caz $8 \cdot 8 = 64$ de matrice cu proprietatea din enunț.

Analog, pentru $c = 1$, vom obține $7 \cdot 7 = 49$ matrice, pentru $c = 2$ obținem $6 \cdot 6 = 36$ matrice de forma cerută, ..., pentru $c = 7$ obținem o matrice.

În total vom avea $8^2 + 7^2 + 6^2 + \cdots + 1^2 = 204$ matrice de forma cerută.

Barem:

$a + c + e = b + c + d$ dacă $a + e = b + d$.	**1p**
Pentru c=0, trebuie să avem $\begin{cases} a + e = 7 \\ b + d = 7 \end{cases}$, de unde rezultă că perechile de numere naturale (a, e) și (b, d) pot fi alese în câte opt moduri; vom avea în acest caz $8 \cdot 8 = 64$ de matrice cu proprietatea din enunț.	**3p**
Pentru $c = 1$, vom obține $7 \cdot 7 = 49$ matrice, pentru $c = 2$ obținem $6 \cdot 6 = 36$ matrice de forma cerută, ..., pentru $c = 7$ obținem o matrice.	**2p**
În total vom avea $8^2 + 7^2 + 6^2 + \cdots + 1^2 = 204$ matrice de forma cerută.	**1p**

***Notă:* Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.**