CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„*ADOLF HAIMOVICI*”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 15 FEBRUARIE 2025
Clasa a X-a

H2 **Filiera teoretică, profil Real, specializarea Științe ale naturii**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. (7p) Fie z_1 și z_2 numere complexe astfel încât $|z_1| = |z_2| = 1$ și $z_1 + z_2 = -i$.

a) (2p) Arătați că $\overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$;

b) (3p) Arătați că $(z_1 + i)(z_2 + i) = -1$;

c) (2p) Calculați $z_1^{2025} + z_2^{2025}$.

(prof. Carp Cezar Nicolae, Câmpulung Moldovenesc)

<u>Barem</u>

a) $|z_1| = 1 \Rightarrow |z_1|^2 = 1 \Rightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} = 1 \Rightarrow \overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$;	**2 puncte**
b) $(z_1 + i)(z_2 + i) = z_1z_2 + i(z_1 + z_2) + i^2 = z_1z_2 + i(z_1 + z_2) - 1$	**1 punct**
$z_1 + z_2 = -i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = i \Rightarrow \overline{z_1} + \overline{z_2} = i \Rightarrow \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = i \Rightarrow \frac{z_1+z_2}{z_1 \cdot z_2} = i \Rightarrow z_1 + z_2 = iz_1z_2$	**1 punct**
$(z_1 + i)(z_2 + i) = z_1z_2 + i(z_1 + z_2) - 1 = z_1z_2 + i \cdot (i \cdot z_1z_2) - 1 = z_1z_2 + i^2z_1z_2 - 1 = z_1z_2 - z_1z_2 - 1 = -1$	**1 punct**
c) $z_1 + z_2 = iz_1z_2 \Rightarrow z_1z_2 = \frac{z_1+z_2}{i} = \frac{-i}{i} = -1$ prin urmare, z_1și $z_2$sunt soluțiile ecuației $z^2 + iz - 1 = 0$. Atunci $z^2 = -iz + 1 \Rightarrow z^3 = (1 - iz) \cdot z = z - iz^2 = = z - i(-iz + 1) = -i \Rightarrow z_1^3 = -i, z_2^3 = -i.$	**1 punct**
$\Rightarrow z_1^{2025} + z_2^{2025} = (z_1^3)^{675} + (z_2^3)^{675} = (-i)^{675} + (-i)^{675} = 2 \cdot (-i)^{672} \cdot (-i)^3 = 2i$	**1 punct**

2. a) (3p) Demonstrați că, pentru orice numere reale a, b, c, are loc egalitatea :

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a);$$

b) (4p) Determinați numerele reale x pentru care $\sqrt[3]{3x + 2} + \sqrt[3]{x^2 - 5x + 2} + \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 4} = 2$.

(prof. Carp Gabriela Dorina, Câmpulung Moldovenesc)

<u>Barem</u>

a) $(a+b+c)^3=\left((a+b)+c\right)^3=(a+b)^3+c^3+3c(a+b)(a+b+c)=$ $=a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3+3c(a+b)(a+b+c)=$ $=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(ab+ac+bc+c^2)$ $=a^3+b^3+c^3+3(a+b)[a(b+c)+c(b+c)]=(a+b+c)^3=$ $=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$	**1 punct** **1 punct** **1 punct**
$\left(\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{x^2-5x+2}+\sqrt[3]{-x^2+2x+4}\right)^3=2^3$ și folosind relația demonstrată la a) obținem $\left(\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{x^2-5x+2}\right)\left(\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{-x^2+2x+4}\right)\left(\sqrt[3]{x^2-5x+2}+\sqrt[3]{-x^2+2x+4}\right)=0 \Rightarrow \sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{x^2-5x+2}=0 \Rightarrow \sqrt[3]{3x+2}=-\sqrt[3]{x^2-5x+2} \Rightarrow$ $x^2-2x+4=0$, care nu are soluții reale $\left(\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{-x^2+2x+4}\right)=0 \Rightarrow -x^2+5x+6=0$ cu soluțiile $x_1=-1$ și $x_2=6$ $\sqrt[3]{x^2-5x+2}+\sqrt[3]{-x^2+2x+4}=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2-5x+2}=-\sqrt[3]{-x^2+2x+4} \Rightarrow x=2$ $S=\{-1,2,6\}$	**1 punct** **1 punct** **1 punct** **1 punct**

3. (**7p**) Fie $a,b,c\in(1,+\infty)$ cu proprietatea $\frac{\left(lg\,a^{bc}+lg\,b^{ac}+lg\,c^{ab}\right)^3}{27}=a^2b^2c^2\cdot lg\,a\cdot lg\,b\cdot lg\,c$ și expresia $E=log_a\,b+log_b\,c+log_c\,a$. Arătați că $E=\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$.

(prof. Moisuc Niculina Mihaela , Rădăuţi)

<u>**Barem**</u>

$a,b,c\in(1,+\infty) \Rightarrow lg\,a^{bc}, lg\,b^{ac}, lg\,c^{ab}$ sunt numere pozitive.	**1 punct**
$\frac{\left(lg\,a^{bc}+lg\,b^{ac}+lg\,c^{ab}\right)^3}{27}=a^2b^2c^2\cdot lg\,a\cdot lg\,b\cdot lg\,c \Rightarrow \left(\frac{lg\,a^{bc}+lg\,b^{ac}+lg\,c^{ab}}{3}\right)^3=lg\,a^{bc}\,lg\,b^{ac}\,lg\,c^{ab}$	**1 punct**
$\Rightarrow \frac{lg\,a^{bc}+lg\,b^{ac}+lg\,c^{ab}}{3}=\sqrt[3]{lg\,a^{bc}\cdot lg\,b^{ac}\cdot lg\,c^{ab}}$ (1)	**1 punct**
Folosind inegalitatea mediilor : $\frac{lg\,a^{bc}+lg\,b^{ac}+lg\,c^{ab}}{3}\geq\sqrt[3]{lg\,a^{bc}\cdot lg\,b^{ac}\cdot lg\,c^{ab}}$, din relația (1)	**1 punct**
$\Rightarrow lg\,a^{bc}=lg\,b^{ac}=lg\,c^{ab}$ și $bc\cdot lg\,a=ac\cdot lg\,b=ab\,log\,c$.	**1 punct**
$bc\cdot lg\,a=ac\cdot lg\,b \Rightarrow \frac{lg\,a}{lg\,b}=\frac{a}{b}$ și analoagele.	**1 punct**
$E=log_a\,b+log_b\,c+log_c\,a=\frac{lg\,b}{lg\,a}+\frac{lg\,c}{lg\,b}+\frac{lg\,a}{lg\,c}=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$.	**1 punct**

4. **(7p)** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3+6}{7}$.

a) **(3p)** Să se arate că f este inversabilă și să se determine f^{-1}, inversa ei.

b) **(4p)** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor f și f^{-1}.

(prof. Carp Cezar Nicolae, Câmpulung Moldovenesc)

Barem

Demonstrarea injectivității Demonstrarea surjectivității $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{7x-6}$.	**1 punct** **1 punct** **1 punct**
$f^{-1}(x) = f(x)$ și cum G_f și $G_{f^{-1}}$ sunt simetrice față de prima bisectoare a axelor de coordonate, ele se întâlnesc pe această bisectoare $\Rightarrow f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$ Rezolvarea ecuației $\sqrt[3]{7x-6} = x \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -3$	**1 punct** **1 punct** **2 puncte**

Notă: **Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.**