CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„*ADOLF HAIMOVICI*”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 15 FEBRUARIE 2025
CLASA a X-a

H1 **Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. a) **(3p)** Aduceți la forma cea mai simplă expresia:
$E=\left(\log_x y+\log_y x+2\right)\cdot\left(\log_x y-\log_{xy} y\right)\cdot\log_y x+\log_x\left(\log_y \sqrt[x]{y}\right)$, unde $x\in\mathbb{N}^*, y>0, x\neq 1, y\neq 1$

b) **(4p)** Rezolvați inecuația $\sqrt{\log_2\frac{x+1}{4-x}}\leq 2$.

Negrea Daniela, Suceava

Soluție:

1.a)	$E=\left(\log_x y+\dfrac{1}{\log_x y}+2\right)\cdot\left(\log_x y-\dfrac{\log_x y}{1+\log_x y}\right)\cdot\dfrac{1}{\log_x y}+\log_x\left(\dfrac{1}{x}\right)=$	**1p**
	$=\dfrac{\left(1+\log_x y\right)^2}{\log_x y}\cdot\log_x y\cdot\left(1-\dfrac{1}{1+\log_x y}\right)\cdot\dfrac{1}{\log_x y}-1=$	**1p**
	$=\log_x y$	**1p**
1.b)	$\dfrac{x+1}{4-x}>0$, $\log_2\dfrac{x+1}{4-x}\geq 0=\log_2 1\Rightarrow\dfrac{x+1}{4-x}\geq 1$ și	**2p**
	$\log_2\dfrac{x+1}{4-x}\leq 4=\log_2 16 \Rightarrow \dfrac{x+1}{4-x}\leq 16$	**1p**
	și se ajunge la $x\in\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{63}{17}\right]$.	**1p**

2. a) **(3p)** Arătați că $\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}=\dfrac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) **(4p)** Fie $S_n=\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}}$. Găsiți cel mai mare număr natural n pentru care $S_n<\sqrt{2}$.

Cenușă Remus, Suceava

Soluție:

2.a)	$\dfrac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{2n+1+2\sqrt{4n^2-1}+2n-1}{2}}=$	**1p**
	$\sqrt{\dfrac{4n+2\sqrt{4n^2-1}}{2}}=\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}$	**1p**
2.b)	$S_n=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+...+\dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}\right)$	**2p**

	$\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2n+1}-1}{2}\right)<\sqrt{2}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{2n+1}-1}{2}<1$	**1p**
	$\sqrt{2n+1}<3\Rightarrow 2n+1<9\Rightarrow n<4$. Deci cel mai mare număr natural n pentru care $S_n<\sqrt{2}$ este n=3.	**1p**

3. Fie $f:\mathbb{C}\setminus\{i\}\to\mathbb{C}^*,\quad f(z)=\dfrac{2}{i-z}$.

   a) **(2p)** Arătați că: $f^{2025}(-1+2i)\notin\mathbb{R}$.

   b) **(2p)** Rezolvați ecuația $(f\circ f)(z)=z$.

   c) **(3p)** Să se determine mulțimea $\{z\in\mathbb{C}\,/\,f(z)\in\mathbb{R}\}$.

Petrache Aurica, Suceava

Soluție:

3.a)	$f^{2025}(-1+2i)=\left(\dfrac{2}{1-i}\right)^{2025}=(1+i)^{2025}=$	**1p**
	$(1+i)^{2024}\cdot(1+i)=2^{1012}(1+i)$ de unde partea imaginară este 2^{1012}	**1p**
3.b)	$(f\circ f)(z)=z\Rightarrow\dfrac{2(i-z)}{-3-iz}=z$	**1p**
	$\Leftrightarrow\ z^2-iz+2=0$ cu soluțiile $z\in\{-i;2i\}$	**1p**
3.c)	$f(z)\in\mathbb{R}\ \to\ \dfrac{2}{i-z}\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ i-z\in\mathbb{R}$	**2p**
	$\Rightarrow$ b=1, Dacă z=a+bi. Deci $\{z\in\mathbb{C}\,/\,f(z)\in\mathbb{R}\}=\{a+i\,/\,a\in\mathbb{R}\}$.	**1p**

4. a) **(3p)** Să se calculeze suma: $S=\log_a\sqrt{x}+\log_{a^2}\sqrt[3]{x}+...+\log_{a^{2024}}\sqrt[2025]{x}$, a;x>0, $a\neq1$, x>0.

   b) **(4p)** Dacă $x,y,z\in(1;\infty)$ să se arate că $\log_x^3(yz)+\log_y^3(xz)+\log_z^3(xy)\geq24$.

Hopulele Marcela, Suceava

Soluție:

4.a)	$S=\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+...+\dfrac{1}{2024\cdot2025}\right)\log_a x=$	**1p**
	$=\left(\dfrac{2-1}{1\cdot2}+\dfrac{3-2}{2\cdot3}+...+\dfrac{2025-2024}{2024\cdot2025}\right)\log_a x=$	**1p**
	$=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{2024}-\dfrac{1}{2025}\right)\log_a x=\left(1-\dfrac{1}{2025}\right)\log_a x=\dfrac{2024}{2025}\log_a x.$	**1p**
4.b)	Se aplică inegalitatea mediilor $\log_x^3(yz)+\log_y^3(xz)+\log_z^3(xy)\geq3\sqrt[3]{\log_x^3(yz)\cdot\log_y^3(xz)\cdot\log_z^3(xy)}=$	**1p**
	$3\cdot\log_x(yz)\cdot\log_y(xz)\cdot\log_z(xy)=3(\log_x y+\log_x z)\cdot(\log_y x+\log_y z)\cdot(\log_z x+\log_z y)\geq(*)$ Se aplică $\log_a b+\log_a c\geq2\sqrt{\log_a b\cdot\log_a c}$	**2p**
	$(*)\geq3\cdot2\cdot\sqrt{\log_x y\cdot\log_x z}\cdot2\cdot\sqrt{\log_y x\cdot\log_y z}\cdot2\cdot\sqrt{\log_z x\cdot\log_z y}=24$	**1p**

Notă: **Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.**